DÉMONSTRATION D'UNE PROPOSITION RELATIVE AUX ÉQUATIONS LINÉAIRES

Autor(en): **Dumas, G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1906)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-9282

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

bole est donc une trajectoire orthogonale des droites de l'abaque.

3° On pourrait tracer la parabole $q^2 = 4p$ et mener les tangentes à cette courbe. Les perpendiculaires à ces tangentes, menées par les points de rencontre avec l'axe horizontal, donneraient les droites utiles de l'abaque.

E. Brand (Bruxelles).

DÉMONSTRATION D'UNE PROPOSITION RELATIVE AUX ÉQUATIONS LINÉAIRES

Le théorème que nous nous proposons de démontrer est le suivant :

Un système

$$\begin{array}{lllll}
x_1 = b_{1,1}, & x_2 = b_{1,2}, & x_3 = b_{1,3}, & \ldots & x_n = b_{1,n} \\
x_1 = b_{2,1}, & x_2 = b_{2,2}, & x_3 = b_{2,3}, & \ldots & x_n = b_{2,n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x_1 = b_{s,1}, & x_2 = b_{s,2}, & x_3 = b_{s,3}, & \ldots & x_n = b_{s,n}
\end{array}$$

de s *solutions du système d'équations linéaires et homogènes,*

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{r,1}x_1 + a_{r,2}x_2 + \ldots + a_{r,n}x_n = 0
\end{array} \right.$$

étant donné, tout système de valeurs

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 = b_{1,1}t_1 + b_{2,1}t_2 + \ldots + b_{s,1}t_s \\ x_2 = b_{1,2}t_1 + b_{2,2}t_2 + \ldots + b_{s,2}t_s \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = b_{1,n}t_1 + b_{2,n}t_2 + \ldots + b_{s,n}t_s \end{cases}$$

dans lequel t_1, t_2, ... t_s *représentent des paramètres arbitraires est solution de (1).*

Si, réciproquement $s = n - r$, *et si les deux tableaux*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \ldots & a_{r,n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \ldots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \ldots & b_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{s,1} & b_{s,2} & \ldots & b_{s,n} \end{pmatrix}$$

sont respectivement de rang r *et* s, *toute solution de (1) pourra se mettre sous la forme (2).*

Cette proposition fondamentale occupe dans la science mathématique une place considérable. On l'applique, par exemple, à chaque instant, dans la théorie des courbes et surfaces algébriques. Toutefois, ce n'est pas sous cette forme qu'elle se trouve généralement énoncée dans les traités d'Algèbre. On se contente le plus souvent d'établir que r des inconnues du système (1), qui ne peuvent pas d'ailleurs être choisies tout à fait arbitrairement, s'expriment en fonction des $(n - r)$ autres, lorsque le rang du tableau A des coefficients de (1) est égal à r. Ceci suffit pour la plupart des applications, quoique, à vrai dire, cette répartition des inconnues en deux catégories ne soit guère satisfaisante.

Si, d'autre part, $r = n - 1$, on sait que x_1, x_2, ... x_n, sont proportionnels aux déterminants pris avec des signes convenables et formés en supprimant sucessivement dans A chacune des colonnes. Que correspond-il à ceci dans le cas d'un nombre quelconque d'équations ? Voilà ce qu'on omet habituellement de dire.

Il semble, en un mot, mal aisé de donner sans être long

ou sans utiliser un symbolisme quelque peu excessif une démonstration, satisfaisante à tous égards, du théorème ci-dessus.

Celle qui suit a pour elle l'avantage de la brièveté. Elle suppose, en revanche, réels, hypothèse dont elle s'affranchit facilement ensuite, tous les éléments des tableaux A et B.

On peut de bien des façons former un tableau B. A étant de rang r, l'un quelconque des déterminants de degré r que renferme A sera différent de zéro. Supposons pour fixer les idées que ce soit le déterminant A′ formé des r premières colonnes de A.

Considérons ensuite, un déterminant de degré s, le déterminant

$$B' = \begin{vmatrix} b_{1,\,r+1} & b_{1,\,r+2} & \cdots & b_{1,\,n} \\ b_{2,\,r+1} & b_{2,\,r+2} & \cdots & b_{2,\,n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s,\,r+1} & b_{s,\,r+2} & \cdots & b_{s,\,n} \end{vmatrix}$$

aux éléments duquel nous donnons des valeurs quelconques, astreintes à la seule condition de ne pas l'annuler.

Dans (1), faisons :

$$x_{r+1} = b_{i,\,r+1}\,, \quad x_{r+2} = b_{i,\,r+2}\,, \quad \ldots\,, \quad x_n = b_{i,\,n}$$

et résolvons par rapport à $x_1, x_2, \ldots x_r$ le système d'équations non homogènes, à déterminant A′, différent de zéro, que l'on obtient ainsi; $x_1, x_2, \ldots x_r$ sont alors déterminés d'une manière unique. Nous écrirons :

$$x_1 = b_{i,\,1}\,, \quad x_2 = b_{i,\,2}\,, \quad \ldots\,, \quad x_r = b_{i,\,r}\,.$$

En donnant à i successivement les valeurs, 1, 2,... s, on obtient de la sorte s solutions de (1), dont le tableau, B, est nécessairement de rang s, puisqu'il renferme le déterminant B′, par hypothèse différent de zéro.

Ceci dit, *supposons dans A et B tous les éléments réels.* Puis formons au moyen de A et B le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \dots & a_{r,n} \\ b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{s,1} & b_{s,2} & \dots & b_{s,n} \end{vmatrix}$$

Désignons aussi par M et N les déterminants qui s'obtiennent en élevant symboliquement au carré les tableaux A et B.

Si l'on pose

$$c_{i,k} = a_{i,1}a_{k,1} + a_{i,2}a_{k,2} + \dots + a_{i,n}a_{k,n}, \qquad (i, k = 1, 2, 3, \dots r)$$

$$d_{j,l} = b_{j,1}b_{l,1} + b_{j,2}b_{l,2} + \dots + b_{j,n}b_{l,n}, \qquad (j, l = 1, 2, 3, \dots s)$$

on aura

$$M = | c_{i,k} |, \quad N = | d_{j,l} |.$$

Un premier résultat s'obtient immédiatement :

$$D^2 = \left| \begin{array}{c:c} M & \begin{array}{c}\text{Eléments}\\ \text{tous}\\ \text{nuls.}\end{array} \\ \hdashline \begin{array}{c}\text{Eléments}\\ \text{tous nuls.}\end{array} & N \end{array} \right|$$

c'est-à-dire

$$D^2 = MN. \tag{3}$$

Développons maintenant D au moyen de la règle de Laplace. Appelons P_1, P_2,... P_l les déterminants distincts, de degré r, formés avec les r premières lignes de D ; Q_1, Q_2,... Q les déterminants de degré s formés avec les s dernières.

Supposons aussi les notations choisies de telle sorte que Q_1 représente, affecté du signe qu'il convient, le mineur complémentaire de P_1, Q_2 celui de P_2, etc.

On aura, d'une part,

$$D = \sum_{i=1}^{l} P_i Q_i$$

et d'autre part, comme conséquence du théorème de multiplication des tableaux :

$$M = \sum_{i=1}^{l} P_i^2 , \quad N = \sum_{i=1}^{l} Q_i^2 .$$

On en déduit aussitôt, à cause de (3),

$$\left(\sum_{i=1}^{l} P_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{l} Q_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{l} P_i Q_i\right)^2 = 0 .$$

Comme le premier membre s'obtient aussi par élévation au carré du tableau

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_l \\ Q_1 & Q_2 & \dots & Q_l \end{pmatrix} ,$$

on en déduit immédiatement

$$\sum (P_i Q_j - Q_i P_j)^2 = 0 , \qquad (i, j = 1, 2, 3, \dots l) .$$

Mais, par hypothèse, les éléments des tableaux A et B sont tous réels, on a donc :

$$P_i Q_j - Q_i P_j = 0 , \tag{4}$$

quels que soient les indices i et j.

Les déterminants complémentaires dans A et B sont donc proportionnels.

Supposons maintenant, hypothèse légitime, $P_i \neq 0$, $Q_j \neq 0$; il en résulte de suite $P_j \neq 0$, $Q_i \neq 0$. Par conséquent :

Deux déterminants complémentaires dans A et B sont toujours simultanément différents de zéro.

Ce point établi, considérons un système quelconque de valeurs

$$x_1 , x_2 , \dots x_n$$

vérifiant les équations (1). Parmi les mineurs complémentaires de D simultanément différents de zéro, supposons, pour fixer les idées, qu'il y ait entre autres les deux déterminants :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,r} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \dots & a_{r,r} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} b_{1,r+1} & b_{1,r+2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,r+1} & b_{2,r+2} & \dots & b_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{s,r+1} & b_{s,r+2} & \dots & b_{s,n} \end{vmatrix} .$$

On pourra toujours, mais d'une seule façon, déterminer des quantités de t_1, t_2, ... t_s, de manière à avoir

$$x_{r+k} = b_{1,r+k}t_1 + b_{2,r+k}t_2 + \dots + b_{s,r+k}t_s \qquad (k = 1, 2, 3, \dots s)$$

d'où l'on déduit :

$$x_l = b_{1,l}t_1 + b_{2,l}t_2 + \dots + b_{s,l}t_s + \varepsilon_l , \qquad (l = 1, 2, 3, \dots r)$$

les ε_λ représentant certaines quantités dont il s'agit de fixer la valeur.

Pour ceci introduisons toutes les quantités x_1, x_2, ... x_n dans les r premières équations (1). En vertu de la première partie, évidente d'ailleurs, de la proposition que nous voulons démontrer, on aboutit au système suivant d'équations pour la détermination des ε_l :

$$a_{k,1}\varepsilon_1 + a_{k,2}\varepsilon_2 + \dots + a_{k,r}\varepsilon_r = 0 , \qquad (k = 1, 2, 3. \dots r) .$$

Le déterminant des coefficients étant différent de zéro, les ε_l sont de la sorte nécessairement nuls.

Notre proposition, dans le cas d'éléments réels, se trouve ainsi complètement établie.

Comme d'autre part tout polynôme entier dépendant de plusieurs variables s'annule identiquement s'il est égal à zéro quelles que soient les valeurs réelles attribuées à chacune des variables, nous sommes assurés de tomber sur des identités si dans les relations (4) nous remplaçons les éléments b par leurs expressions en fonction des éléments a. Quelle que soit, par conséquent, la nature des éléments de D, que ceux-ci soient réels ou imaginaires, les déterminants

complémentaires de D appartenant respectivement à A et B seront toujours proportionnels. Deux quelconques d'entre eux seront, par conséquent, toujours simultanément différents de zéro.

La proposition se trouve, de ce fait, établie dans tous les cas possibles.

Pour être complet, on doit encore ajouter la remarque suivante :

Le nombre k *étant inférieur à* s, *il n'existe aucun système de solutions de* (1) :

$$x_1 = l_{i,1}\,,\ x_2 = l_{i,2}\,,\ \ldots\ x_n = l_{i,n}\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots k)$$

tel qu'en donnant à y_1, y_2, ... y_k, *des valeurs convenables, toute solution de* (1) *puisse se mettre sous la forme*

$$x_j = l_{1,j}y_1 + l_{2,j}y_2 + \ldots + l_{k,j}y_k\,, \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots n)\ .$$

Si, en effet, la chose pouvait avoir lieu, tous les déterminants Q_1, Q_2, ... Q_l de degré s que l'on forme au moyen de B se réduiraient à zéro. Le rang de B ne pourrait être égal à s. On aboutit à cette conclusion en remplaçant dans l'un quelconque des déterminants Q_i, chaque élément b en fonction des $l_{i,j}$. On arrive de la sorte à un déterminant qui s'obtient aussi, par multiplication de deux tableaux dans lesquels le nombre des lignes est supérieur à celui des colonnes, à un déterminant nul par conséquent.

Il existe, nous l'avons vu, une infinité de tableaux tels que B, et tous de rang s. Appelons homologues les déterminants de degré s, constitués dans chacun d'eux au moyen des mêmes colonnes. On a la proposition :

Dans deux tableaux B *les déterminants homologues sont proportionnels.*

Des tableaux A et B nous avons en effet déduit les relations (4). De A et d'un autre tableau B on déduirait, Q'_i et Q'_j ayant une signification évidente, les relations analogues

$$\frac{P_i}{Q'_i} = \frac{P_j}{Q'_j}\,, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots l)\,. \tag{5}$$

De (4) et (5) résulte aussitôt

$$\frac{Q_i}{Q'_i} = \frac{Q_j}{Q'_j}, \qquad (i,j = 1, 2, \ldots l).$$

Ceci démontre la proposition que nous venons d'énoncer. Celle-ci, pour les mêmes raisons que tout à l'heure, est vraie quelle que soit la nature des éléments considérés.

Remarque. Dans le cas où les équations (1), au lieu d'être homogènes, admettent un second membre et sont de la forme

$$(6) \qquad a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \ldots + a_{k,n}x_n = d_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots r)$$

leur solution la plus générale, s'il en existe une, est de la forme

$$x_j = b_{j,1}t_1 + b_{j,2}t_2 + \ldots + b_{j,s}t_s + \alpha_j, \qquad (j = 1, 2, \ldots n)$$

dans laquelle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ représentent alors l'un quelconque des systèmes de valeurs vérifiant (6).

La démonstration est immédiate. Nous ne nous y arrêtons pas.

G. Dumas (Zurich).

CONSTRUCTION ET GÉNÉRATION DES COURBES

du $(n+1)^e$ degré et de la $(n+1)^e$ classe[1].

Nous commencerons par les définitions suivantes :

Groupe du $(n+1)^e$ degré.

Un faisceau dont chaque rayon correspond à n rayons d'un autre faisceau alors que chaque rayon de celui-ci correspond à un seul rayon du précédent, détermine avec le deuxième, un groupe du $(n+1)^e$ degré.

Groupe de la $(n+1)^e$ classe.

Etant donné deux divisions de points, telles que chaque point de la première correspond à n de la deuxième et chaque point de la deuxième à un seul de la première, ces divisions forment un groupe de la $(n+1)^e$ classe.

[1] Voir C. R. 1906 (n° 24, 11 juin et n° 1, 2 juillet).