

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 8 (1906)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LES FONCTIONS ANGULAIRES DANS LA GÉOMÉTRIE DE L'AJUSTAGE  
**Autor:** Andrade, Jules  
**Kapitel:** IV. — Rotations relatives autour d'axes quelconques.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-9270>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

l'angle  $\alpha$ , soit  $l$  la longueur de l'arc de ce petit cercle intercepté, si  $r$  est le rayon de la sphère, on a :

$$\frac{l}{R(r)} = \sin \left( \frac{AP}{R(r)} \right) \alpha.$$

Si les rayons AP et PB deviennent infiniment petits on pourra donc écrire en vertu des résultats déjà acquis :

$$\lim \frac{l}{\text{corde } AP} = \alpha.$$

Or si on projette la figure sur le plan du petit cercle, si P'A est la projection de la corde AP, on a :

$$\lim \frac{\text{corde } PA}{P'A} = 1, \quad \text{donc aussi,} \quad \lim \frac{l}{P'A} = \alpha;$$

or

$$l = H(P'A) \cdot \alpha \cdot m',$$

et comme  $\frac{H(P'A)}{PA}$  a pour limite 1 quand P'A tend vers zéro, on a

$$\lim \frac{l}{P'A} = \alpha \cdot m',$$

d'où, en comparant les deux limites de  $\frac{l}{P'A}$ , on conclut  $m' = 1$ .

**REMARQUE.** — Dans la géométrie de la droite ouverte et dans un triangle plan qui a deux côtés infiniment petits le déficit de la somme des angles à 2 angles droits est infiniment petit.

#### IV. — Rotations relatives autour d'axes quelconques.

L'étude déjà faite d'un système de rotations relatives autour d'axes concourants fournit un lemme important qui nous permettra d'aller plus loin.

**LEMME FONDAMENTAL.** — Soient  $U_1$  et  $U_2$  deux droites actuellement données et ne se coupant pas ; considérons un premier corps solide  $S_1$  animé d'une rotation uniforme de vitesse angulaire  $\omega_1$  autour de  $U_1$ , considérons la droite  $\Delta_2$  de ce solide qui coïncidait avec  $U_2$  à l'époque  $t$ , et envisageons par rapport au solide  $S_1$  un second solide  $S_2$  tournant sur  $S_1$  avec une vitesse angulaire constante  $\omega_2$  ; soit un certain point

du solide  $S_2$ , défini par sa position A à l'époque  $t$ ; à l'époque  $t$  ce point coïncide avec un certain point du solide  $S_1$  qui à l'époque  $t'$  sera venu en B, si on donne alors au point B la rotation relative qu'il doit éprouver autour de la position de  $\Delta_2$  à l'époque  $t'$  avec vitesse angulaire  $\omega_2$  le point B vient en C; C sera la position à l'époque  $t'$  occupée par le point du solide  $S_2$  qui était en A à l'époque  $t$ .

D'autre part, considérons le vecteur issu de A qui représente la vitesse linéaire due à une rotation de vitesse angulaire  $\omega_1$  autour de  $U_1$ ; considérons encore le vecteur issu de B qui représente la vitesse linéaire *qu'aurait* le point A s'il tournait autour de  $U_2$  avec la vitesse angulaire  $\omega_2$ ; formons le vecteur *résultant* de ces deux vecteurs concourants et multiplions le par la durée  $t' - t$ , nous obtenons ainsi un vecteur A D; *je dis que l'extrémité D de ce vecteur sera séparée du point C par un écart infiniment petit d'ordre supérieur à l'ordre de  $t' - t$* .

**DÉMONSTRATION.** — Observons d'abord que si  $\Omega_3$  est le vecteur résultant de deux vecteurs concourants en O,  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  et que si M est un point de la perpendiculaire élevée de M au plan des trois vecteurs  $\Omega$  la vitesse  $v_3$  de M due à la rotation  $\Omega_3$  sera un vecteur égal au vecteur résultant des deux vecteurs  $v_1$  et  $v_2$  qui représenteraient les vitesses linéaires qui seraient dues aux rotations isolées  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . (Conséquence des résultats déjà acquis et de l'invariance de l'opération vectorielle; soit alors  $dt = t' - t$  une durée infiniment petite; du mode d'équivalence des vecteurs concourants interprétés par des vitesses de rotation on conclut que le vecteur  $V_3 dt$  est la limite de la droite qui ferme le contour de deux vecteurs successifs MN et NN', lorsque ce contour se modifie à tout instant de la durée  $dt$  de la manière suivante:

N est la position occupée à l'époque  $t + dt$  par un point de  $S_1$  qui était en M à l'époque  $t$ ; le segment NN' est la corde d'un déplacement relatif de  $S_2$  par rapport à  $S_1$ , et tournant autour d'une droite  $\Delta_2$ . Cette corde variable est-elle même entraînée avec le solide  $S_1$  pendant que le point de départ N de cette corde décrit d'un mouvement continu l'arc dont M N est la corde dans la rotation  $\Omega_1$ ; or pendant le déplacement

de  $S_1$  nous pouvons envisager les segments  $NM$  et  $NN'$  comme issus du point mobile  $N$  et repérés par rapport à un trièdre de sommet  $N$  et qui serait invariablement lié au solide  $S_1$ ; or la droite  $NM$  issue de  $N$  et ainsi repérée tend vers une droite déterminée de  $S_1$  qui est la tangente en  $N$  à l'arc  $MN$ , et de même la droite  $NN'$  issue de  $N$  et ainsi repérée tend vers une droite déterminée de  $S_1$  perpendiculaire au plan de  $N$  et de la droite  $\Delta_2$  qui à l'époque  $t$  porte  $\Omega_2$ ; ces deux droites limites coïncident d'ailleurs à l'époque  $t$  avec les vecteurs distincts  $V_1$  et  $-V_2$ ; on conclut de là aisément par nos lemmes de continuité que :

1. le plan  $MNM'$  qui pivote sur  $M$  fait un angle infiniment petit avec le plan des vecteurs  $V_1$  et  $V_2$ ;

2. l'angle que fait la droite  $\overrightarrow{NN'}$  avec le vecteur  $\overrightarrow{NM}$  est infiniment peu différent du supplément de l'angle de  $V_2$  et de  $V_1$ ;

3. l'écart entre le point  $N'$  et l'extrémité du vecteur  $V_3 dt$  est infiniment petit du second ordre;

4. l'extrémité du vecteur  $V_3 dt$  et le point où vient l'extrémité du vecteur  $V_2 dt$  par une translation  $V_1 dt$  d'axe  $V_1$  sont séparés par un écart infiniment petit du second ordre.

Nous pouvons maintenantachever la démonstration du lemme.

Nous prendrons comme vecteurs  $V_1$  et  $V_2$  les vitesses linéaires dues aux rotations isolées  $\omega_1$  sur  $U_1$  et  $\omega_2$  sur  $U_2$ .

Ces vecteurs  $V_1$  et  $V_2$  peuvent être réalisés comme vitesses linéaires dues à deux rotations concourantes  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  en un point  $O$  de la perpendiculaire élevée de  $M$  au plan de  $V_1$  et de  $V_2$ . D'autre part en considérant les positions relatives de  $S_1$  tournant autour de  $U_1$  puis de  $\Delta_2$  tournant autour de  $\Delta_2$  nous voyons que les cordes  $M\nu$  et  $\nu\nu'$  de ces deux déplacements relatifs peuvent encore être repérées par rapport à un trièdre de sommet  $\nu$  lié au solide  $S_1$ , or bien que ce contour variable  $M\nu\nu'$  soit différent du contour variable  $MNN'$  envisagé tout à l'heure, il possède, dans ses déplacements de pivotement sur  $\nu$  dans  $S_1$  et de pivotement sur  $M$  dans l'espace fixe, les propriétés suivantes :

1. la droite  $M\nu$  pivotant sur  $M$  tend vers la droite du vecteur  $V_1$ ;

2. La corde  $\nu\nu'$  pivotant sur  $\nu$  dans  $S_1$  tend vers une droite de  $S_1$  qui à l'époque  $t$  est dirigée suivant la droite qui porte le vecteur  $V_2$ ;

3. enfin par les lemmes de continuité le plan de contour  $M\nu\nu'$  et le plan de  $V_1$  et  $V_2$  font un angle infiniment petit;

4. par les mêmes lemmes le point  $\nu'$  est à un écart du second ordre du point où vient l'extrémité du vecteur  $V_2$   $dt$  subissant la translation dont l'axe est  $V_1$   $dt$  et dont l'étendue centrale est  $V_1$   $dt$  donc enfin le vecteur  $\frac{M\nu'}{dt}$  issu de  $M$  a pour valeur limite le vecteur  $V_3$  issu de  $M$ . C. Q. F. D.

**REMARQUE.** — Le cas où les vecteurs  $V_1$  et  $V_2$  seraient dans un même plan exigerait une légère modification de la démonstration.

**COROLLAIRE.** — Le vecteur  $\lim. \frac{M\nu'}{dt} = V_3$  est indépendant de l'ordre dans lequel sont envisagés les vecteurs  $\omega_1$  et  $\omega_2$  portés par  $U_1$  et par  $U_2$  donc :

**THÉORÈME 15.** — Dans le mouvement qui résulte de deux rotations relatives autour de deux axes donnés à l'époque  $t$  tout point du second solide défini par sa position à l'époque  $t$  a une vitesse indépendante de l'ordre des emboitements des solides entraînés.

**THÉORÈME 16.** — Le théorème précédent se généralise de lui-même pour le cas de  $n$  rotations relatives quelconques.

**THÉORÈME 17.** — La vitesse linéaire d'un point du solide  $S_n$  défini par sa position à l'époque  $t$  est le vecteur résultant des vecteurs qui représentent pour les mêmes points les vitesses linéaires dues aux rotations *isolées*  $\omega_1, \omega_2, \dots$  portées par les axes  $U_1, U_2, \dots$  etc.

**Définition des systèmes de vecteurs équivalents.** — Le système des vecteurs vitesses de rotation,  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , portés par les droites  $U_1, U_2, \dots, U_n$  définit donc, dans une composition de mouvements relatifs, une distribution des vitesses qui à l'époque  $t$  est indépendante de l'ordre dans lequel sont envisagés ces vecteurs, tout vecteur  $\omega_i$  peut d'ailleurs, sans changer la distribution des vitesses dans l'espace envisagé à l'épo-

que  $t$ , être décomposé en vecteurs concourants, en l'un quelconque des points de la droite qui porte ce vecteur.

Enfin, par la nature même des vecteurs vitesses de rotation, une paire de deux vecteurs égaux et contraires, portés par une même droite, mais non immédiatement appliqués au même point, forment, au point de vue de la distribution des vitesses un ensemble équivalent à zéro, c'est-à-dire un ensemble *en équilibre*; une telle paire se nomme *paire de vecteurs mutuels*. Nous pouvons donc enfin énoncer le théorème intéressant que voici :

**THÉORÈME 18.** — Il existe des systèmes de vecteurs *équivalents* et cette équivalence jouit des propriétés suivantes :

1. Tout système de vecteurs reste équivalent à lui-même quand on lui ajoute ou lui retranche un nombre quelconque de paires de systèmes de deux vecteurs mutuels;
2. un système de vecteurs concourants équivaut toujours à un vecteur résultant déterminé comme nous l'avons vu;
3. Un système de deux vecteurs ne peut équivaloir à zéro, (c'est-à-dire produire une distribution de vitesses nulles) que si ces vecteurs forment une paire de vecteurs mutuels.

Ces propriétés vont nous permettre d'achever la trigonométrie plane.

## V. — Réduction de Poinsot et Trigonométrie plane.

Soient  $V$  un vecteur, et  $O$  un point particulier de l'espace d'ailleurs quelconque, soit  $H$  le pied d'une perpendiculaire abaissée de  $O$  sur  $V$ , et soit  $H'$  le point symétrique de  $H$  par rapport au point  $O$ . Considérons le vecteur  $V$  comme appliqué en  $H$ ; remplaçons d'abord le vecteur  $V_H$  par les vecteurs  $\left(\frac{1}{2}V\right)_H$ ,  $\left(\frac{1}{2}V\right)_H$ , puis appliquons au point  $H'$  deux vecteurs  $W_{H'}$  et  $-W_{H'}$ , perpendiculaires à  $OH$  dans le plan  $(O, V_H)$  et égaux respectivement à  $\frac{1}{2}V_H$  et à  $-\frac{1}{2}V_H$ ; c'est permis puisque  $W_{H'}$  et  $-W_{H'}$  s'équilibrivent. Soit  $x$  la distance  $OH$ .