Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 8 (1906)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UN DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE

Autor: Jamet, V.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-9265

une idée juste. Il n'est peut-être pas inopportun de rappeler ici que les membres de la Société mathématique de France ont connu sur ce sujet les scrupules d'un de leurs anciens confrères. Malheureusement, l'auteur s'obstinait à voir dans l'incorrection du langage une idée fausse de Cauchy. Par son manque de mesure et de perpicacité, il a sans doute éloigné ses auditeurs d'une observation qui avait quelque chose de juste.

E. CARVALLO (Paris).

SUR UN DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE

Quand on veut donner aux élèves, antérieurement à toute notion sur les dérivées, l'exemple du développement d'une fonction en série entière, on recourt tout naturellement à l'identité.

$$(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \tag{1}$$

(pour $x < 1$), qui résulte, soit de la théorie de la division, soit des progressions géométriques. Je me propose de généraliser cet exemple, et j'attache une certaine importance à cette généralisation, à cause de l'application dont elle est susceptible, et par laquelle je terminerai cet article. Pour le moment je veux montrer comment la formule (1) entraîne, comme conséquence, la formule suivante

$$(1 - x)^{-m} = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m+1)}{1 - 2} x^2 + \dots + \frac{m(m+1)\dots(m+p-1)}{p\,!} x^p + \dots \tag{2}$$

pour toutes les valeurs entières de m.

Soient, en effet, deux séries entières

$$S = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$
$$T = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

convergentes pour une même valeur de x. Je dis que le produit ST est égal à la somme de la série

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} (a_0 b_p + a_1 b_{p-1} + \dots + a_p b_0)\, x^p,$$

dont la convergence résultera de la démonstration ci-après. Désignons par S_n la somme des $n + 1$ premiers termes de la série S, par T_n la somme des $n + 1$ premiers termes de la série T, posons

$$S = S_n + \alpha \ , \qquad T = T_n + \beta$$

et observons que

$$ST = S_n T_n + \alpha T_n + \beta S_n + \alpha\beta \ .$$

Nous en déduisons que, n croissant au delà de toute limite $S_n T_n$ a pour limite ST.

Mais

$$S_n T_n = \sum_{p=0}^{p=n} (a_0 b_p + a_1 b_{p-1} + \dots + a_p b_0)\, x^p.$$

Donc le second membre de cette égalité a pour limite ST.

Admettons maintenant que l'égalité (2) soit vraie pour une certaine valeur de m et proposons-nous de démontrer qu'elle est vraie pour la valeur suivante. A cet effet, multiplions les égalités (1) et (2) membre à membre. Nous trouvons :

$$(1 - x)^{-(m+1)} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \left(1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m+1)}{1.2} + \dots + \frac{m(m+1)\dots(m+p-1)}{p\,!}\right) x^p$$

et il reste à démontrer que le coefficient de x^p est égal à

$$\frac{(m+1)(m+2)\dots(m+p)}{p\,!}.$$

Soit donc

$$A_{m,p} = \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+p)}{p\,!}.$$

On trouve, successivement

$$A_{m,p} = A_{m,p-1}\left(1+\frac{m}{p}\right) = A_{m,p-1} + A_{m-1,p}.$$

De même

$$\begin{aligned}
A_{m,p-1} &= A_{m,p-2} + A_{m-1,p-1}, \\
A_{m,p-2} &= A_{m,p-3} + A_{m-1,p-2}, \\
&\dots\dots\dots\dots \\
A_{m,2} &= A_{m,1} + A_{m-1,2}, \\
A_{m,1} &= m + 1
\end{aligned}$$

En ajoutant ces égalités membre à membre, et supprimant les termes communs aux deux membres de l'égalité résultante, on trouve

$$A_{m,p} = A_{m-1,p-1} + A_{m-1,p-2} + \dots + A_{m-1,2} + \frac{m}{1} + 1,$$

ou bien :

$$\frac{(m+1)(m+2)\dots(m+p-1)}{p\,!} = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m+1)}{1.2} + \dots + \frac{m(m+1)\dots(m+p-1)}{p\,!},$$

c. q. f. d.

Application. Il résulte de ce qui précède que pour toute valeur de m, entière et positive, le nombre

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}$$

est égal à la somme de la série

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{m(m+1)}{1.2}\cdot\frac{1}{m^2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{m^3} + \dots$$

Or le terme général de cette série, savoir

$$\frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+p-1)}{p\,!}\cdot\frac{1}{m^p}$$

est égal à

$$\frac{\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1+\frac{p-1}{m}\right)}{p\,!}.$$

On en conclut

$$(3)\qquad \left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m} > 1+\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{p\,!}=e\,.$$

D'autre part :

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=1+\sum_{p=1}^{p=m}\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)}{p\,!}<e\,.$$

J'aurai donc démontré que, m croissant au delà de toute limite, les deux nombres

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m},\quad \text{et}\quad \left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}$$

ont pour limite e, si je fais voir que leur différence a pour limite zéro. Or

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}=\left(\frac{m}{m-1}\right)^{m}=\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m};$$

et, en vertu de l'identité :

$$x^m-a^m=(x-a)(x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots+a^{m-1}),$$

$$\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m}-\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=\frac{1}{m(m-1)}\Bigg[\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}+$$

$$\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-2}\left(1+\frac{1}{m}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-1}\Bigg]$$

On en conclut :

$$\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m-\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \frac{1}{m(m-1)}\, m\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1} < \frac{e}{m-1}\,;$$

et cette inégalité démontre la proposition.

V. Jamet (Marseille).

P. S. — Au moment de corriger l'épreuve, je m'aperçois que la dernière partie de ce travail est susceptible d'une grande simplification. En effet, la relation (3) entraîne la suivante :

$$\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{-(m+1)} > e$$

ou bien

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} > e\,.$$

Mais :

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}=\left(1+\frac{1}{m}\right)^m+\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

Donc :

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}-\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\,;$$

donc

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}-\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \frac{e}{m}\,,$$

et l'on est conduit à la même conclusion que ci-dessus.