Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 8 (1906)

**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÉOMÉTRIE APPLIQUÉE LA THÉORIE DES ROTATIONS ET LE

**NIVEAU A BULLE** 

Autor: Andrade, Jules

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-9263

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 30.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

est déduite de la méthode des essais, ou d'une manière plus précise de la méthode de la formation graduelle de l'inconnue d'après les conditions du problème.

V. Bobynin (Moscou).

(Traduction de M. E. Papelier, Orléans.)

# GÉOMÉTRIE APPLIQUÉE

LA THÉORIE DES ROTATIONS ET LE NIVEAU A BULLE

Théorème I. (Principe des deux demi-tours). — Soient OV<sub>1</sub> et OV<sub>2</sub> deux axes concourants. Pour déplacer un solide par un demi-tour sur l'axe OV<sub>1</sub>, on peut déplacer le solide par un demi-tour sur l'axe OV<sub>2</sub> suivi d'une rotation égale à 2 fois l'angle V<sub>2</sub>OV<sub>1</sub> exécutée autour d'une perpendiculaire au plan des axes.

Remarque. La démonstration est immédiate; on peut aussi regarder cette proposition comme un cas particulier de la combinaison de deux rotations successives finies.

Soit à composer ces deux mouvements d'une figure sphérique : 1° une rotation λ<sub>2</sub> exécutée autour du pôle P<sub>2</sub>; 2° une rotation λ<sub>1</sub> exécutée autour du pôle P<sub>1</sub>.

On construit un triangle sphérique de base  $P_2P_1$  dont le côté  $P_2M$  issu du pôle de la première rotation, est sur l'arc de grand cercle obtenu en faisant tourner l'arc  $P_2P_1$  autour de  $P_2$  de l'angle  $-\frac{1}{2}\lambda_2$  et dont le côté  $P_1M$  issu du pôle  $P_1$  est sur l'arc de grand cercle obtenu en faisant tourner l'arc  $P_1P_2$  de l'angle  $+\frac{1}{2}\lambda_1$  autour de  $P_1$ .

M est le pôle de la rotation équivalente aux deux rotations successives et son amplitude est l'angle extérieur  $\langle x \text{MP}_1 \rangle$ 

Mx étant le prolongement de l'arc P2 M.

Théorème II. (Principe des deux quarts de tour). — Soient dans l'espace deux axes concourants OV1 et OV2 et donnous à un solide le déplacement de un quart de tour sur OV1. Ce déplacement peut être obtenu par un quart de tour sur OV2, suivi 1° d'une rotation V2OV1 autour d'une perpendiculaire au plan V1OV2 et 2° d'une rotation de même amplitude autour d'une perpendiculaire à OV1 menée par O dans le plan V1OV2.

La démonstration se fait immédiatement en considérant le solide comme défini par deux demi-barres assemblées, dont les positions initiales seraient précisément OV2 et OV1.

Théorème III. — Soient P et Q deux points d'une surface sphérique dont la distance angulaire est *i* (mesurée avec l'unité trigonométrique des angles).

Une rotation j' d'une figure sphérique autour du pôle Q peut être remplacée par une rotation j autour du pôle P suivie d'une rotation j'' autour d'un point H situé sur l'arc de grand cercle dont P est le pôle.

Or le triangle PQH nous donne:

$$\sin \frac{1}{2} \text{ O}j' = \frac{\sin \frac{1}{2} j}{\sin \text{HQ}} = \frac{\sin \frac{1}{2} j''}{\sin i}$$
.

Supposons maintenant les angles i et j fort petits; on aura j'=j, à des quantités près de l'ordre de  $ji^2$ ; sensiblement  $[j'=j+\frac{1}{2}\,mji^2]$ ; m étant voisin de 1.

et, ... j'' = ij' = ij, à des quantités près de l'ordre de  $ij'i^2$ .

Application des théorèmes précédents au problème suivant: Rendre vertical l'axe de pivotement d'un solide, par exemple un théodolite.

On suppose que l'on dispose d'un niveau à bulle, porté par l'instrument. Le niveau à bulle consiste essentiellement en une surface en verre, de révolution et de très petite courbure méridienne :

$$\frac{1}{200^{\mathrm{m}}}$$
 ou  $\frac{1}{400^{\mathrm{m}}}$  .

L'intérieur de cette surface est remplie d'éther dont une bulle de vapeur se place symétriquement dans un plan méridien vertical; le milieu de cette bulle définit un point du solide de verre où la tangente à la méridienne de la fiole est horizontale.

Le niveau est toujours placé de manière que l'axe de révolution de la surface graduée de la fiole soit à peu près horizontal, l'axe de la fiole constitue *la base* du niveau.

Supposons le niveau du théodolite ayant sa base à peu près parallèle à la droite OA qui joint le pied O de l'axe à une vis A du trépied de l'instrument. L'axe étant placé, à l'œil, à peu près vertical, supposons d'abord que l'on donne à l'appareil une rotation exacte d'un demi-tour autour de son axe et cherchons à prévoir le déplacement qui va en résulter pour la bulle.

Soit  $OV_3$  l'axe de l'instrument,  $OV_2$  sa projection sur le plan vertical mené par OA et soit  $OV_1$  la verticale menée par O soit  $\varnothing V_1 OV_2 = i$  et  $\varnothing V_2 OV_3 = k$ .

D'après le théorème I le demi-tour sur  $OV_3$  est remplaçable par un demi-tour sur  $OV_2$ , suivi d'une rotation 2k autour de la droite Ox perpendiculaire au plan  $V_2 OV_3$ , c'està-dire presque parallèle à OA. La tangente à la méridienne de la fiole en la première position de l'appareil fait un angle  $\alpha$  très petit avec l'axe Ox et cette tangente par la rotation 2k va faire avec sa direction primitive un angle  $\beta$  dont la moitié a pour sinus

 $\sin \alpha \sin k$  c'est-à-dire que sensiblement  $\beta \equiv 2k\alpha$  .

Voyons maintenant l'effet du demi-tour sur  $OV_2$ ; ce dernier peut être remplacé par un demi-tour sur  $OV_1$  et par une rotation d'amplitude 2i autour de l'horizontale perpendiculaire au plan vertical OA. Celle-ci aura pour effet de déplacer la division d'arrêt de la bulle presque dans le même plan méridien de la fiole et d'un angle égal à 2i; si donc le

demi-tour effectuée on agit sur la vis A de manière à ramener la bulle de la moitié de son déplacement, on redressera la droite de  $OV_2$  vers  $OV_1$ , et très sensiblement de l'angle i. D'après le théorème III, nous pouvons en effet très sensiblement remplacer la rotation 2k autour de Ox: 1° par une rotation sensiblement égale autour de l'axe de la fiole, rotation qui change le plan méridien de la fiole sans changer les rangs des divisions tangentes à la bulle, et 2° par une rotation autour d'un axe perpendiculaire à l'axe de la fiole et sensiblement égal à  $2\gamma k$ ,  $\gamma$  étant l'angle de l'axe de la fiole et de Ox, ce qui produira un déplacement d'orientation de l'ordre de  $\gamma k$ , lequel est négligeable si l'une ou l'autre des quantités  $\gamma$  ou k est comparable à i.

Supposons que la rotation réalisée autour de OV<sub>3</sub> ne soit pas exactement de 1 demi-tour, mais un demi-tour plus une petite rotation résiduelle  $\delta$ .

Soit l l'angle  $V_3$  OV<sub>1</sub>, la rotation résiduelle  $\delta$  sur OV<sub>3</sub> peut être remplacée par une rotation sensiblement égale à l autour de OV<sub>1</sub> et par une rotation sensiblement égale  $\delta l$  autour d'une horizontale; celle-ci sera négligeable si  $\delta$  ou l est de l'ordre de i ou ce qui revient au même si k ou  $\delta$  est de l'ordre de i (car l < i + k).

La correction *i* ayant été effectuée, comme on l'a dit, pour ce qui est de sa valeur principale par la vis A, on achève de produire le retour de la bulle à sa position médiane en agissant sur la vis propre du niveau, ce qui a pour effet de rendre en cette position l'axe de la fiole horizontal. La projection de l'axe sur le plan vertical OA est alors verticale.

Pour achever le réglage de l'axe de l'appareil, on fait tourner l'appareil autour de son axe, de 1 quart de tour. Supposons d'abord que cette rotation exécutée sur OW2 soit exactement de 1 quart de tour, elle équivaut à 1 quart de tour sur OV1 suivi 1° d'une rotation K autour de OA et 2° d'une rotation K autour d'une droite OY1 située dans le plan OV1 perpendiculaire à OW2, le quart de tour sur OV1 ne déplace pas la bulle, la première rotation K déplace la bulle de l'angle K, la deuxième rotation K autour de OY1 qui est l'axe de la fiole, modifie le méridien central de la bulle, mais sans modifier

les divisions tangentes extrêmes, la première rotation sur OA déplace la bulle de l'angle K.

On la ramène à sa position primitive, en agissant sur les vis B et C, mais en sens inverse et de quantités égales pour laisser la direction OA invariable.

Si enfin le quart de tour n'est pas rigoureusement exact et s'il comporte une petite rotation résiduelle  $\varepsilon$  autour de  $OW_2$ , celle-ci peut être remplacée par une rotation  $\varepsilon$  autour de  $OV_1$  et par une rotation  $\varepsilon K$  autour d'une horizontale voisine de OY, dont l'effet est négligeable vis-à-vis de l'effet principal K.

La première est d'ailleurs sans action sur la bulle.

On voit comment la théorie élémentaire des rotations fait claire et précise la méthode opératoire du réglage des appareils de positions à axe vertical.

Jules Andrade (Besançon).

## SUR LA CONVERGENCE ABSOLUE DES SÉRIES

Les mathématiciens recherchent avec raison la précision et la rigueur des termes. Dans cette voie, il peut être intéressant d'appeler leur attention sur un langage impropre consacré par l'usage, mais qu'il est aisé d'améliorer comme je vais l'expliquer.

On adopte en général, pour les séries, les énoncés suivants: Définition. — Une série convergente est dite absolument convergente si la série des modules de ses termes est aussi convergente. La série proposée est semi-convergente si la série des modules est divergente.

Théorème. — On n'altère pas la valeur d'une série absolument convergente en changeant l'ordre des termes. On peut altérer arbitrairement la valeur d'une série semi-convergente en changeant l'ordre de ses termes.