Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 7 (1905)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DÉTERMINATION DES AXES D'UNE HYPERBOLE DONT DEUX DIAMÈTRES CONJUGUÉS SONT DONNÉS

Autor: Majcen, G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-8433

tandis que les rayons se trouvent par les formules

$$\sin r = \frac{\Delta}{\sqrt{\omega(\nu_1 \nu_2 \nu_3)}} \quad ; \qquad \cos R = \frac{\Delta}{\sqrt{\Omega(\mu_1 \mu_2 \mu_3)}} \quad .$$

Enfin, si nous prenons $\mu_i = 1$ et $\nu_i = \sin A_i$, c'est-à-dire si nous prenons l'intersection des médianes comme point d'unité, les équations précédentes deviennent

$$u_2 u_3 \operatorname{tg} \frac{A_1}{2} + u_3 u_1 \operatorname{tg} \frac{A_2}{2} + u_1 u_2 \operatorname{tg} \frac{A_3}{2} = 0 \quad ;$$

$$x_2 x_3 \sin^2 \frac{a_1}{2} + x_3 x_1 \sin^2 \frac{a_2}{2} + x_1 x_2 \sin^2 \frac{a_3}{2} = 0 \quad .$$

Pour le *plan*, l'équation du cercle inscrit restera en coordonnées barycentriques

$$u_2 u_3 \operatorname{tg} \frac{A_1}{2} + u_3 u_1 \operatorname{tg} \frac{A_2}{2} + u_1 u_2 \operatorname{tg} \frac{A_3}{2} = 0 \quad ,$$

tandis que celle du cercle circonscrit devient

$$a_1^2 x_2 x_3 + a_2^2 x_3 x_1 + a_3^2 x_1 x_2 = 0 \quad .$$

M.-Fr. DANIËLS (Fribourg, Suisse).

DÉTERMINATION DES AXES D'UNE HYPERBOLE

DONT DEUX DIAMÈTRES CONJUGUÉS SONT DONNÉS

On connaît beaucoup de constructions des axes d'une ellipse, dont deux diamètres conjugués sont donnés. L'une des plus récentes et des plus fécondes est celle qui est due à M. MANHEIM [1]. Moins nombreuses sont les solutions de la même question pour l'hyperbole. Mais on peut résoudre cette dernière question avec la même facilité que la première, si l'on regarde une hyperbole quelconque comme projection

[1] *Nouv. Annales de Mathématiques*, 1904, janvier.

d'une hyperbole équilatère. J'ai donné quelques relations entre une hyperbole équilatère et une hyperbole générale dont l'un des axes est égal à l'axe de la première, dans un article intitulé : « *Ueber einige Beziehungen der allgemeinen Hyperbel zu der gleichseitigen*[1], et je continuerai ici ces recherches en vue de la détermination des axes d'une hyperbole générale.

1. Soit une hyperbole équilatère h et a son demi-axe. Faisons tourner cette hyperbole h autour de l'axe imaginaire d'un angle $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Si nous projetons cette position de l'hyperbole h sur le plan primitif, nous obtiendrons une hyperbole h', dont le demi-axe imaginaire b' sera égal à a et dont l'axe réel sera $2\,a \cos\alpha = 2\,a'$, or $a' < b'$. L'angle asymptotique de l'hyperbole h' sera un angle obtus φ. Deux diamètres quelconques conjugués de l'hyperbole h se projetteront en deux diamètres conjugués de la projection h'. Nous pouvons donc considérer deux diamètres conjugués d'une hyperbole générale h' à l'angle asymptotique φ obtus comme projections de deux diamètres conjugués (égaux) d'une hyperbole équilatère h ayant les axes égaux à l'axe imaginaire de h', en observant que l'hyperbole h' est, dans le sens indiqué, une projection de l'hyperbole h.

Nous employons, dans ce qui suit, une construction particulière de l'hyperbole équilatère h. Etant donné un cercle k (fig. 1), dont le rayon est égal à a, menons une tangente t quelconque au cercle k. Soit le point de contact A_1, et le diamètre AOA_1 l'axe réel de l'hyperbole h cherchée. J'ai démontré, dans l'article cité, que les courbes h et k sont des courbes correspondantes dans une *homologie harmonique*, dont A est le centre et t l'axe d'homologie. On trouve un point quelconque sur h de la manière suivante. On choisit un point quelconque T sur t, on joint T au point O et on mène une perpendiculaire en T sur t. La droite TO coupe le cercle k en un point R″. On portera la longueur TR″ sur la perpendiculaire en partant du point T, et on obtiendra ainsi un

[1] *Zeitschrift für mathem. u. naturw. Unterr.*, XXXII., p. 513.

point B qui appartient à l'hyperbole h. En effet, l'équation de l'hyperbole h est $x^2 - y_2 = a_2$, or, $x_2 = \overline{A^1T_2} + a_2$, $x = \overline{OT} = \overline{R^0R}$. — Ce qui précède permet d'établir la construction des axes en question.

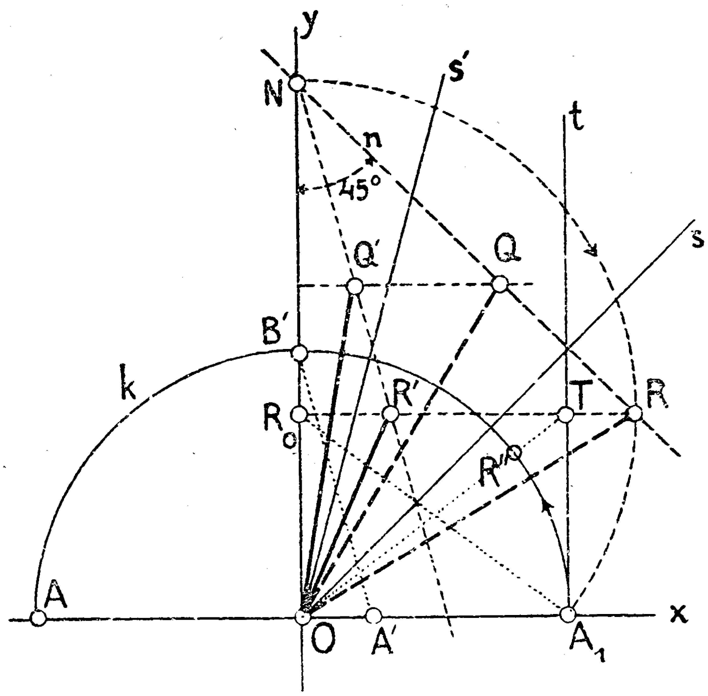

Fig. 1.

2. Soient OA' et OB' les axes, et OR', OQ' deux diamètres conjugués d'une hyperbole h'. Décrivons du centre O avec le rayon étant égal à OB' un cercle k. Celui-ci peut être considéré comme un cercle décrit sur les axes d'une hyperbole équilatère h', dont h' est la projection sur le plan de l'épure, après une rotation de h autour de y, telle que l'axe OA_1 de h se projette en OA'.

Nous n'avons qu'à déterminer la *longueur* de l'axe de cette hyperbole h'', les diamètres conjugués de h' : OQ' et OQ' étant donnés. Faisons donc tourner l'hyperbole h'' autour de y, jusqu'à ce qu'elle vienne dans le plan de l'épure en h, et déterminons la position des points extrêmes R' et Q' des diamètres donnés après la rotation faite. Les arcs qui sont décrits par ces deux points seront dans la projection deux droites parallèles à x. Comme les diamètres OR et OQ deviendront (après la rotation) deux diamètres conjugués de l'hyperbole équilatère h, ils auront la même longueur et ils seront placés symétriquement à l'asymptote s de l'hyperbole h. Le point N, comme point commun à l'axe de rotation y et à la droite de jonction $R'Q'$, reste pendant la rotation immobile. Or, nous menons par N une droite n telle que l'angle (ny) soit égal à 45°, et cette droite coupe les droites menées par Q' et R' parallèlement à x en deux points extrêmes R et Q des diamètres conjugués appartenant à l'hyperbole h.

L'asymptote s' de l'hyperbole h' passe par le milieu M′ de la longueur R′Q′, or, l'hyperbole h' ayant un angle asymptotique *obtus*, passe réellement par le point R′ qui est situé dans l'angle asymptotique *obtus*.

Nous avons, d'après la construction particulière donnée de l'hyperbole h :

$$OR'' + R''T = R_0T + TR$$

ou

$$OT = R_0R\,,$$

mais on a aussi $OT = R_0A_1$. Alors pour obtenir le point A_1, on décrira du point R_0 avec le rayon étant égal à R_0R un arc de cercle qui coupe x en A_1. La longueur OA_1 est un *axe* de l'hyperbole h' et cela l'axe étant égal à l'axe de l'hyperbole h, c'est-à-dire l'axe OB′ qui est sur l'axe de rotation y. Nous ajoutons que l'arc RA_1 passe aussi par le point N parce que nous avons l'égalité $R_0R = R_0N$. Or, on n'a pas besoin de déterminer le point R, on peut se servir du point N qu'on obtiendra aisément.

3. En supposant quelques relations bien connues entre l'hyperbole et ses diamètres conjugués, nous donnons la *construction* suivante *des axes*, privée de toutes les lignes auxiliaires superflues (fig. 2).

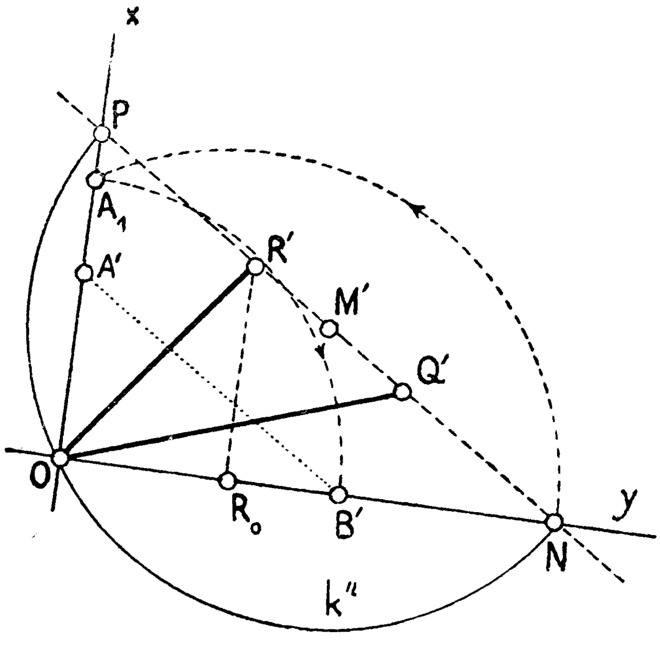

Fig. 2.

Etant donnés deux demi-diamètres conjugués OR′, OQ′ d'une hyperbole, on décrira du milieu M′ de la longueur R′Q′ un demi-cercle k'' qui coupe la droite de jonction R′Q′ en deux points P et N. Les droites OP et ON (ou x et y) sont les *directions des axes* de l'hyberbole. L'asymptote OM′

de cette hyperbole fera, en général, avec x et y deux angles inégaux. Le point R′ sera dans l'un, le point Q′ dans l'autre de ces angles. On choisit de deux points R′ et Q′ celui qui est dans l'angle *plus grand* (c'est la moitié de l'angle asymptotique obtus), et on mène par lui (R′) une parallèle à l'axe (x) laquelle est un côté de cette angle même. La parallèle coupe l'autre axe (y) en un point R_0. On décrit de ce point comme centre avec le rayon étant égal à la distance du point R_0 de l'intersection N des droites y et R′Q′ un arc de cercle qui coupe l'autre axe (x) en un point A_1. La longueur OA_1 est la *grandeur* de l'axe OB′ de l'hyperbole situé sur la direction y.

On obtient la grandeur de l'axe sur la direction x, si l'on mène par B′ une parallèle à la droite R′Q′ et qu'on détermine le point A′ commun à cette droite et à x.

La longueur OB′ sera le demi-axe *réel* ou *imaginaire* selon que l'hyperbole passe réellement par Q′ ou par R′, parce que deux hyperboles conjuguées ont les *mêmes* longueurs des axes.

Je crois qu'en raison de la simplicité de cette construction on pourrait en faire usage dans l'enseignement.

G. MAJCEN (Agram).

VECTEURS RELATIFS A UNE COURBE

(Application de la Méthode de Grassmann.)

Soient un point P et un vecteur I, tous deux fonction d'un paramètre λ. Lorsque λ varie, le segment PI décrit une surface réglée; cherchons la condition pour qu'elle soit développable.

On doit avoir, en dérivant par rapport à λ

$$P'II' = 0 \quad . \tag{1}$$