

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 7 (1905)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LES COORDONNÉES PROJECTIVES SUR LA SPHÈRE  
**Autor:** Daniels, M.-Fr.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-8432>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

*Questioni che riguardano la geometria elementare*, M. BONOLA donne aussi une démonstration de la proposition que la somme des angles d'un triangle sphérique est plus grande que deux angles droits, en ayant cependant recours à la notion extensive de l'aire du triangle, qu'il est certainement utile d'éviter. Au contraire, dès le 1895, M. MANSION a donné, dans un supplément de *Mathesis*, une construction de la Géométrie et de la Trigonométrie sphériques, indépendante des hypothèses sur les droites parallèles et sur l'infinité de la droite. Si l'on confronte avec celle-ci la nouvelle construction on verra, je l'espère, que l'intérêt méthodologique n'est nullement diminué.

Plaisance, 12 Février 1905.

---

## LES COORDONNÉES PROJECTIVES SUR LA SPHÈRE

---

1. Des coordonnées sphériques non-homogènes ont été introduites par C. GUDERMANN<sup>1</sup>, qui, pour déterminer la position d'un point M par rapport à un triangle sphérique VXY dont deux côtés VX et VY sont droits, mène par le point en question les droites sphériques XM et YM. La première rencontre le côté VY en Q, la seconde rencontre le côté VX en P. Ce sont les tangentes trigonométriques des arcs VQ et VP, qu'il considère comme les coordonnées du point M (*Axenkoordinate*). Quelquefois il emploie aussi un système de coordonnées polaires : l'arc VM et l'angle XVM, qu'il appelle les coordonnées centrales du point M (*Centralkoordinate*). Les problèmes ordinaires de la droite, des coniques, de la cycloïde et de la chaînette sphériques qui sont traités dans ces systèmes de coordonnées donnent lieu à des déductions et des formules d'une extrême longueur, ce qui explique suffisamment l'oubli dans lequel les recherches de Gudermann sont tombées.

---

<sup>1</sup> C. GUDERMANN. *Grundriss der analytischen Sphärik*. Köln, 1830.

Indépendamment de lui, un géomètre anglais, Ch. GRAVES<sup>1</sup>, arrivait, quelques années plus tard, aux mêmes systèmes de coordonnées. Pour l'emploi des coordonnées polaires sphériques il avait été devancé par son compatriote S. T. DAVIES<sup>2</sup>.

On doit à MÖBIUS<sup>3</sup> un premier essai d'introduire un système de coordonnées homogènes sur la sphère. Il y arrive en étendant à cette surface le calcul barycentrique, et voici comment il procède. Si A, B, C sont trois points de la sphère, on peut, pour tout autre point Q de la surface sphérique, trouver des nombres  $a, b, c$  tels que

$$a \cos VA + b \cos VB + c \cos VC = q \cos VQ \quad ,$$

le point V étant un point de la sphère tout à fait quelconque. Pour arriver à une sphérique analytique, nous voulons, dit Möbius, par abréviation, laisser de côté les signes  $\cos$  et V et écrire, au lieu de l'équation précédente :

$$aA + bB + cC = qQ \quad .$$

Les coefficients  $a, b, c$  sont alors les coordonnées homogènes du point Q, et Möbius démontre ensuite que cette manière de traiter analytiquement la surface sphérique est au calcul barycentrique comme la sphérique est à la planimétrie. Le centre de gravité des poids  $a, b, c$  en A, B, C ne sera pas dans la surface sphérique, mais on peut ajouter au centre de la sphère M un poids  $m$ , tel qu'il est ramené au point de la sphère  $aA + bB + cC$ .

G. SALMON<sup>4</sup>, procédant autrement, arrive à des meilleurs résultats. Si l'on substitue les coordonnées d'un point P de la sphère dans le premier membre de l'équation normale  $\alpha = 0$  d'un plan passant par l'origine (qui est en même temps le centre de la sphère), on obtient la normale abaissée du

<sup>1</sup> *Two geometrical Memoirs on the general properties of cones of the second degree and of the spherical conics by M. Chasles, translated from the french, with notes and additions, and an appendix on the application of analysis to spherical Geometry, by the Rev. Charles GRAVES. Dublin, 1841.*

<sup>2</sup> Transactions of the Royal Society of Edinburgh, Vol. XII.

<sup>3</sup> MÖBIUS. *Gesammelte Werke*, II<sup>ter</sup> Band, S. 1-54.

<sup>4</sup> SALMON-FIEDLER. *Analytische Geometrie des Raumes*, I. Teil, 3. Auflage, X. Kapitel.

point P sur le plan  $\alpha = 0$  ou encore le sinus de l'arc sphérique compris entre P et le grand cercle déterminé sur la sphère par le plan. Les valeurs  $\alpha, \beta, \gamma$  qu'il obtient ainsi pour trois plans différents passant par le centre sont les coordonnées du point P par rapport au triangle sphérique que ces trois plans déterminent sur la sphère.

Nous allons développer un système de coordonnées projectives sphériques, qui permet de passer de deux manières différentes aux cas spéciaux des coordonnées projectives planes et aux coordonnées cartésiennes. Le traitement des problèmes sphériques, dans ce système de coordonnées, se trouvera être plus simple et plus symétrique que celui des problèmes analogues pour le plan, et il ne nécessitera nulle part l'intervention de la connaissance des coordonnées cartésiennes. Sous ce rapport, l'exposition ordinaire des coordonnées projectives, qui présuppose déjà la connaissance de ce qui en est un cas spécial, laisse certainement à désirer.

Nous nous servons, dans l'exposition des éléments de la sphérique analytique qui va suivre, de quelques relations très simples du calcul des vecteurs qui se trouvent dans un article de *L'Enseign. Mathématique* (mars 1902, p. 111-113).

2. Le rayon de la sphère étant l'unité, chaque *point* de sa surface est déterminé par un vecteur-unité  $\mathbf{r}$  partant du centre. Chaque multiple positif de ce vecteur détermine le même point; chaque multiple négatif détermine le point diamétralement opposé.

Une *droite* sphérique, son sens positif étant fixé, est déterminée par un vecteur-unité  $\mathbf{l}$  partant du centre, normal au plan de la droite sphérique, et à gauche lorsque celle-ci est parcourue dans le sens positif. Un multiple négatif de  $\mathbf{l}$  détermine la même droite parcourue dans le sens inverse.

3. Le triangle sphérique  $\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3$  a les angles extérieurs  $A_1, A_2, A_3$  ou  $A_{23}, A_{31}, A_{12}$ , les côtés  $a_1, a_2, a_3$  ou  $a_{23}, a_{31}, a_{12}$  et les hauteurs  $h_1, h_2, h_3$ . Si, en parcourant les côtés dans le sens indiqué par les flèches, on prend les vecteurs  $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$



des droites à gauche, on obtient le triangle polaire dont les angles extérieurs sont  $a_{23}$ ,  $a_{31}$ ,  $a_{12}$  et les côtés  $A_{23}$ ,  $A_{31}$ ,  $A_{12}$ .

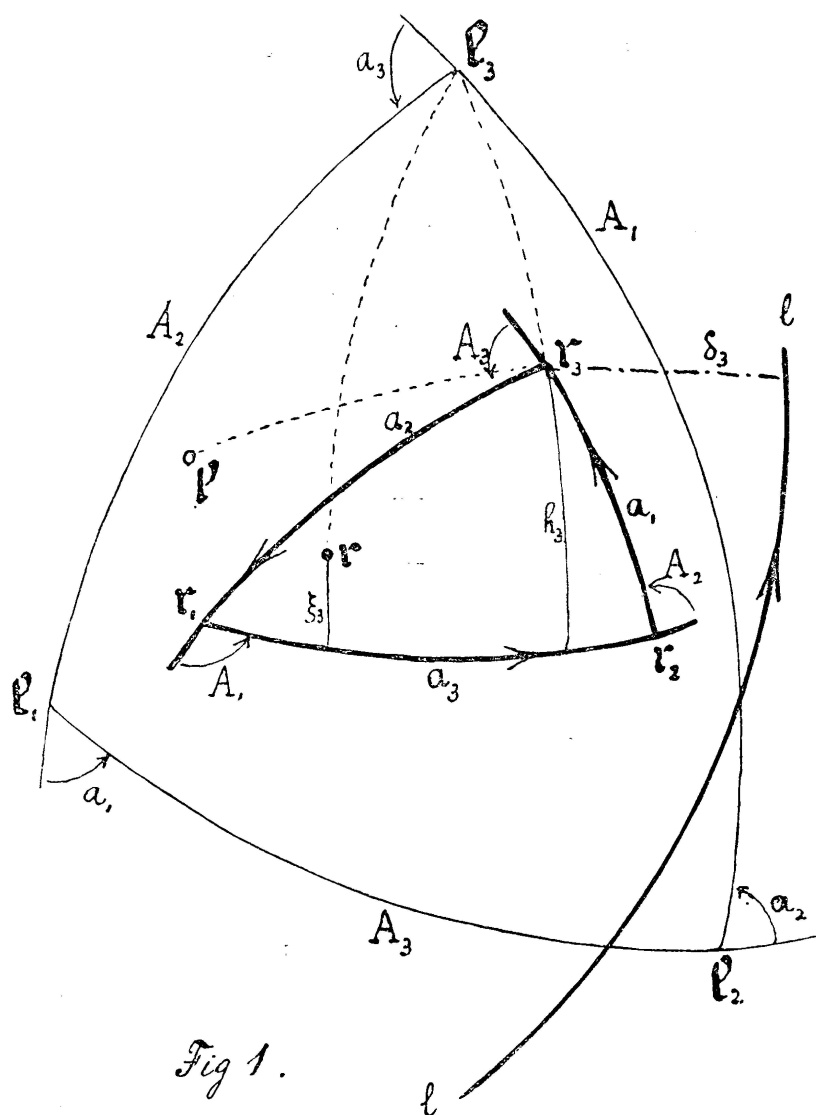


Fig 1.

Les propriétés des produits scalaires nous donnent d'abord les relations suivantes entre les vecteurs des sommets  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  et ceux des côtés  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  du triangle sphérique

$$(1) \begin{cases} r_i r_k = \cos a_{ik} \\ l_i l_k = \cos A_{ik} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} r_i r_i \equiv r_i^2 = 1 \\ l_i l_i \equiv l_i^2 = 1 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} l_i r_i = \sin h_i \\ l_i r_k = 0 \end{cases} ;$$

tandis que celles des produits vectoriels nous fournissent les égalités :

$$(4) \quad Vr_2 r_3 = \sin a_1 . l_1 \quad Vr_3 r_1 = \sin a_2 . l_2 \quad Vr_1 r_2 = \sin a_3 . l_3$$

$$(5) \quad Vl_2 l_3 = \sin A_1 . r_1 \quad Vl_3 l_1 = \sin A_2 . r_2 \quad Vl_1 l_2 = \sin A_3 . r_3 .$$

Les deux premières des équations (4) et (5) nous donnent ensuite :

$$Vr_2 r_3 \cdot Vr_3 r_1 = \sin a_1 \sin a_2 \cdot l_1 l_2$$

$$Vl_2 l_3 \cdot Vl_3 l_1 = \sin A_1 \sin A_2 \cdot r_1 r_2 \quad ,$$

qui, pouvant s'écrire

$$r_2 r_3 \cdot r_3 r_1 - r_2 r_1 = \sin a_1 \sin a_2 \cdot l_1 l_2$$

$$l_2 l_3 \cdot l_3 l_1 - l_2 l_1 = \sin A_1 \sin A_2 \cdot r_1 r_2 \quad ,$$

sont les formules fondamentales de la trigonométrie sphérique :

$$\cos a_1 \cos a_2 - \cos a_3 = \sin a_1 \sin a_2 \cos A_3$$

$$\cos A_1 \cos A_2 - \cos A_3 = \sin A_1 \sin A_2 \cos a_3 \quad .$$

En outre, la multiplication scalaire des équations (4) par  $r_1, r_2, r_3$  donne

$$(6) \quad \sin a_1 \sin h_1 = \sin a_2 \sin h_2 = \sin a_3 \sin h_3 \quad ;$$

de même celle des équations (5) par  $l_1, l_2, l_3$

$$(7) \quad \sin A_1 \sin h_1 = \sin A_2 \sin h_2 = \sin A_3 \sin h_3 \quad ;$$

d'où nous tirons encore

$$(8) \quad \sin a_1 : \sin a_2 : \sin a_3 = \sin A_1 : \sin A_2 : \sin A_3 \quad .$$

4. Le vecteur d'un point, qui en général n'est pas un vecteur-unité et que nous écrirons donc  $x_4 r$ , décomposé d'après les trois vecteurs non-coplanaires, qui déterminent les sommets du triangle de référence, donne

$$x_4 r = m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3$$

ou, si nous introduisons trois constantes  $\mu_i$  différentes de zéro

$$x_4 r = \mu_1 x_1 r_1 + \mu_2 x_2 r_2 + \mu_3 x_3 r_3 \quad .$$

Le vecteur d'une droite, qui en général n'est pas un vecteur-unité et que nous écrirons donc  $u_4 l$ , décomposé d'après les trois vecteurs non-coplanaires correspondant aux sommets du triangle polaire, donne

$$u_4 l = n_1 l_1 + n_2 l_2 + n_3 l_3$$

ou, si nous introduisons trois constantes  $\nu_i$  différentes de zéro

$$u_4 l = \nu_1 u_1 l_1 + \nu_2 u_2 l_2 + \nu_3 u_3 l_3 \quad .$$

Les coefficients  $x_1, x_2, x_3$  sont les coordonnées du point, tandis que le point

$$\mu_1 r_1 + \mu_2 r_2 + \mu_3 r_3 ,$$

dont les coordonnées sont égales à l'unité, est le *point-unité*.

5. *Equation d'une droite*. Pour que le point

$$\mu_1 x_1 r_1 + \mu_2 x_2 r_2 + \mu_3 x_3 r_3$$

soit sur la droite donnée

$$v_1 v_1 l_1 + v_2 v_2 l_2 + v_3 v_3 l_3 ,$$

il faut et il suffit que la distance sphérique de ces deux vecteurs soit  $\frac{\pi}{2}$ , ou que leur produit scalaire

$$\begin{aligned} \mu_1 v_1 \sin h_1 . v_1 x_1 + \mu_2 v_2 \sin h_2 . v_2 x_2 \\ + \mu_3 v_3 \sin h_3 . v_3 x_3 \end{aligned}$$

soit nul.

Les coefficients  $u_1, u_2, u_3$  sont les coordonnées de la droite, tandis que la droite

$$v_1 l_1 + v_2 l_2 + v_3 l_3 ,$$

dont les coordonnées sont égales à l'unité, est la *droite-unité*.

*Equation d'un point*. Pour que la droite

$$v_1 u_1 l_1 + v_2 u_2 l_2 + v_3 u_3 l_3$$

passse par le point donné

$$\mu_1 y_1 r_1 + \mu_2 y_2 r_2 + \mu_3 y_3 r_3 ,$$

il faut et il suffit que la distance sphérique de ces deux vecteurs soit  $\frac{\pi}{2}$ , ou que leur produit scalaire

$$\begin{aligned} v_1 \mu_1 \sin h_1 . y_1 u_1 + v_2 \mu_2 \sin h_2 . y_2 u_2 \\ + v_3 \mu_3 \sin h_3 . y_3 u_3 \end{aligned}$$

soit nul.

Ces conditions se simplifient considérablement si nous choisissons les constantes  $\mu_i$  et  $v_i$  de manière à ce que

$$(9) \quad \mu_1 v_1 \sin h_1 = \mu_2 v_2 \sin h_2 = \mu_3 v_3 \sin h_3 \equiv \Delta .$$

Dans ce cas l'équation de la droite devient en coordonnées ponctuelles sphériques

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0 ,$$

et celle du point en coordonnées tangentielles sphériques

$$y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3 = 0 .$$

L'équation de la droite-unité est

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

et celle du point-unité

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0 .$$

6. Le tenseur  $x_4$  du point

$$x_4 \mathbf{r} = \mu_1 x_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathbf{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathbf{r}_3$$

se trouve, en prenant le carré :

$$x_4^2 = \mu_1^2 x_1^2 + \mu_2^2 x_2^2 + \dots \\ 2 \mu_1 \mu_2 x_1 x_2 \cos \alpha_3 + \dots$$

Nous représentons cette forme quadratique, qui revient souvent, par

$$\omega(x_1 x_2 x_3) \quad \text{ou} \quad \omega(xx) \quad .$$

Le tenseur  $u_4$  de la droite

$$u_4 \mathbf{l} = \nu_1 u_1 \mathbf{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathbf{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathbf{l}_3$$

se trouve, en prenant le carré :

$$u_4^2 = \nu_1^2 u_1^2 + \nu_2 u_2^2 + \dots \\ 2 \nu_1 \nu_2 u_1 u_2 \cos \Lambda_3 + \dots$$

Nous représentons cette forme quadratique, qui se rencontre souvent, par

$$\Omega(u_1 u_2 u_3) \quad \text{ou} \quad \Omega(uu) \quad .$$

7. Si  $\mathbf{l}_0 \mathbf{r}_1 = 0$  et  $\mathbf{l}_0 \mathbf{r}_2 = 0$ , c'est-à-dire si les points  $P_1(\mathbf{r}_1)$  et  $P_2(\mathbf{r}_2)$  sont situés sur la droite  $\mathbf{l}_0$ , tout point

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{r}_1 - \lambda \mathbf{r}_2$$

est également sur  $\mathbf{l}_0$ , parce que son produit scalaire par  $\mathbf{l}_0$  est nul. En outre, nous avons

$$(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}) \equiv \frac{\sin \overline{\mathbf{P}_1 \mathbf{P}}}{\sin \overline{\mathbf{P}_2 \mathbf{P}}} = \lambda \quad ,$$

car si  $\tau$  est la valeur absolue ou le tenseur de  $\mathbf{r}_1 - \lambda \mathbf{r}_2$ , les propriétés du produit vectoriel nous donnent

$$| \mathbf{V}(\mathbf{r}_1 - \lambda \mathbf{r}_2) \mathbf{r}_1 | = \lambda | \mathbf{V} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 | = \tau \sin \overline{\mathbf{P} \mathbf{P}_1} \\ \text{et} \quad | \mathbf{V}(\mathbf{r}_1 - \lambda \mathbf{r}_2) \mathbf{r}_2 | = | \mathbf{V} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 | = \tau \sin \overline{\mathbf{P} \mathbf{P}_2} \quad ;$$

donc

$$\lambda = (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}) \quad .$$

De même on démontre que la droite sphérique

$$\mathbf{p} \equiv \mathbf{l}_1 - \lambda \mathbf{l}_2$$

passé par l'intersection des droites sphériques  $p_1(\mathbf{l}_1)$  et  $p_2(\mathbf{l}_2)$  et que

$$\lambda = (p_1 p_2 \mathbf{p}) \quad .$$

Le rapport anharmonique des points

$$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 - \lambda \mathbf{r}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{r}_1 - \mu \mathbf{r}_2$$

est  $\lambda:\mu$ , et, si l'on fait passer par ces quatre points les quatre droites sphériques concourantes

$$l_1, l_2, l_1 - \lambda_0 l_2 \quad \text{et} \quad l_1 - \mu_0 l_2$$

on aura les égalités

$$l_1 r_1 = 0 \quad l_2 r_2 = 0 \quad (l_1 - \lambda_0 l_2) (r_1 - \lambda r_2) = 0 \quad (l_1 - \mu_0 l_2) (r_1 - \mu r_2) = 0,$$

dont les deux dernières, simplifiées à l'aide des deux précédentes, donnent le théorème de Pappus

$$\lambda : \mu = \lambda_0 : \mu_0.$$

8. Les droites joignant le point

Les points d'intersection de la droite

$$P \equiv \mu_1 x_1 r_1 + \mu_2 x_2 r_2 + \mu_3 x_3 r_3$$

$$p \equiv \nu_1 u_1 l_1 + \nu_2 u_2 l_2 + \nu_3 u_3 l_3$$

aux sommets du triangle rencontrent les côtés opposés en

et des côtés du triangle déterminent avec les sommets opposés les droites

$$P_1 \equiv \mu_2 x_2 r_2 + \mu_3 x_3 r_3;$$

$$p_1 \equiv \nu_2 u_2 l_2 + \nu_3 u_3 l_3;$$

$$P_2 \equiv \mu_3 x_3 r_3 + \mu_1 x_1 r_1; \quad P_3 \equiv \dots$$

$$p_2 \equiv \nu_3 u_3 l_3 + \nu_1 u_1 l_1; \quad p_3 \equiv \dots$$

car  $P$  est aussi bien sur la droite qui relie  $P_1$  au sommet  $A_1$  que sur celle qui relie  $P_2$  à  $A_2$ , etc.

car  $p$  passe aussi bien par l'intersection de  $p_1$  et du côté  $a_1$  que par celle de  $p_2$  et  $a_2$ , etc.

Pour le point-unité

Pour la droite-unité

$$E \equiv \mu_1 r_1 + \mu_2 r_2 + \mu_3 r_3$$

$$e \equiv \nu_1 l_1 + \nu_2 l_2 + \nu_3 l_3$$

nous avons de même<sup>1</sup>

nous avons de même

$$E_1 \equiv \mu_2 r_2 + \mu_3 r_3;$$

$$e_1 \equiv \nu_2 l_2 + \nu_3 l_3;$$

$$E_2 \equiv \mu_3 r_3 + \mu_1 r_1; \quad E_3 \equiv \dots$$

$$e_2 \equiv \nu_3 l_3 + \nu_1 l_1; \quad e_3 \equiv \dots$$

<sup>1</sup> Les points conjugués harmoniques  $E'_1 \equiv \mu_2 r_2 - \mu_3 r_3$ ,  $E'_2 \equiv \mu_3 r_3 - \mu_1 r_1$ ,  $E'_3 \equiv \mu_1 r_1 - \mu_2 r_2$  sont sur une droite (polaire trilinéaire de  $E$ ), dont l'équation — dans la supposition toutefois que les  $\mu_i$  et  $\nu_i$  aient été choisis tels que  $\mu_i \nu_i \sin h_i$  est une constante — peut s'écrire

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

La polaire trilinéaire du point-unité est donc, dans cette supposition, la droite-unité.

Nous en concluons, d'après § 7, que

$$(A_2 A_3 P_1) = - \frac{\mu_3 x_3}{\mu_2 x_2}$$

$$\text{et} \quad (A_2 A_3 E_1) = - \frac{\mu_3}{\mu_2} ,$$

c'est-à-dire que

$$(A_2 A_3 E_1 P_1) = \frac{x_2}{x_3} .$$

De la même manière on trouve naturellement

$$(A_3 A_1 E_2 P_2) = \frac{x_3}{x_1} , \text{ etc.}$$

Nous en concluons, d'après § 7, que

$$(a_2 a_3 p_1) = - \frac{\nu_3 u_3}{\nu_2 u_2}$$

$$\text{et} \quad (a_2 a_3 e_1) = - \frac{\nu_3}{\nu_2} ,$$

c'est-à-dire que

$$(a_2 a_3 e_1 p_1) = \frac{u_2}{u_3} .$$

De la même manière on trouve

$$(a_3 a_1 e_2 p_2) = \frac{u_3}{u_1} , \text{ etc.}$$

## 9. Ceci nous permet de démontrer les théorèmes suivants :

Si, du centre de la sphère, les sommets  $A_1, A_2, A_3$ ; et les points  $E; P; E_1, P_1$ ; etc., se projettent sur un plan quelconque  $\varepsilon$  en  $A'_1, A'_2, A'_3; E'; P'; E'_1, P'_1$ ; etc., les coordonnées projectives  $x'_i$  du point  $P'$  par rapport au triangle plan  $A'_1 A'_2 A'_3$  seront les mêmes que celles du point  $P$  par rapport au triangle sphérique  $A_1 A_2 A_3$ , pourvu que la projection  $E'$  du point-unité  $E$  devienne point-unité dans le triangle plan.

En effet, nous avons vu que, dans le triangle sphérique :

$$(A_2 A_3 E_1 P_1) = \frac{x_2}{x_3} .$$

Nous avons de même, comme cas spécial dans le triangle plan :

$$(A'_2 A'_3 E'_1 P'_1) = \frac{x'_2}{x'_3} .$$

D'après le théorème de Pappus, les deux rapports anharmoniques sont égaux ; nous

Si, du centre de la sphère, les côtés  $a_1, a_2, a_3$ ; et les droites  $e; p; e_1; p_1$ , etc., se projettent sur un plan quelconque  $\varepsilon$  en  $a'_1, a'_2, a'_3; e'; p'; e'_1; p'_1$ , etc., les coordonnées projectives  $u'_i$  de la droite  $p'$  par rapport au trilatère plan  $a'_1 a'_2 a'_3$  seront les mêmes que celles de la droite  $p$  par rapport au trilatère sphérique  $a_1 a_2 a_3$ , pourvu que la projection  $e'$  de la droite-unité  $e$  devienne droite-unité dans le trilatère plan.

En effet, nous avons vu que, dans le trilatère sphérique :

$$(a_2 a_3 e_1 p_1) = \frac{u_2}{u_3} .$$

Nous avons de même, comme cas spécial dans le trilatère plan :

$$(a'_2 a'_3 e'_1 p'_1) = \frac{u'_2}{u'_3} .$$

D'après le théorème de Pappus, les deux rapports anharmoniques sont égaux ; nous

avons donc  $\frac{x_2}{x_3} = \frac{x'_2}{x'_3}$ , et de même avons donc  $\frac{u_2}{u_3} = \frac{u'_2}{u'_3}$ , et de même

$\frac{x_3}{x_1} = \frac{x'_3}{x'_1}$ , c'est-à-dire  $\frac{u_3}{u_1} = \frac{u'_3}{u'_1}$ ; c'est-à-dire

$$x_1 : x_2 : x_3 = x'_1 : x'_2 : x'_3, \quad u_1 : u_2 : u_3 = u'_1 : u'_2 : u'_3,$$

ce qu'il fallait démontrer.

ce qu'il fallait démontrer.

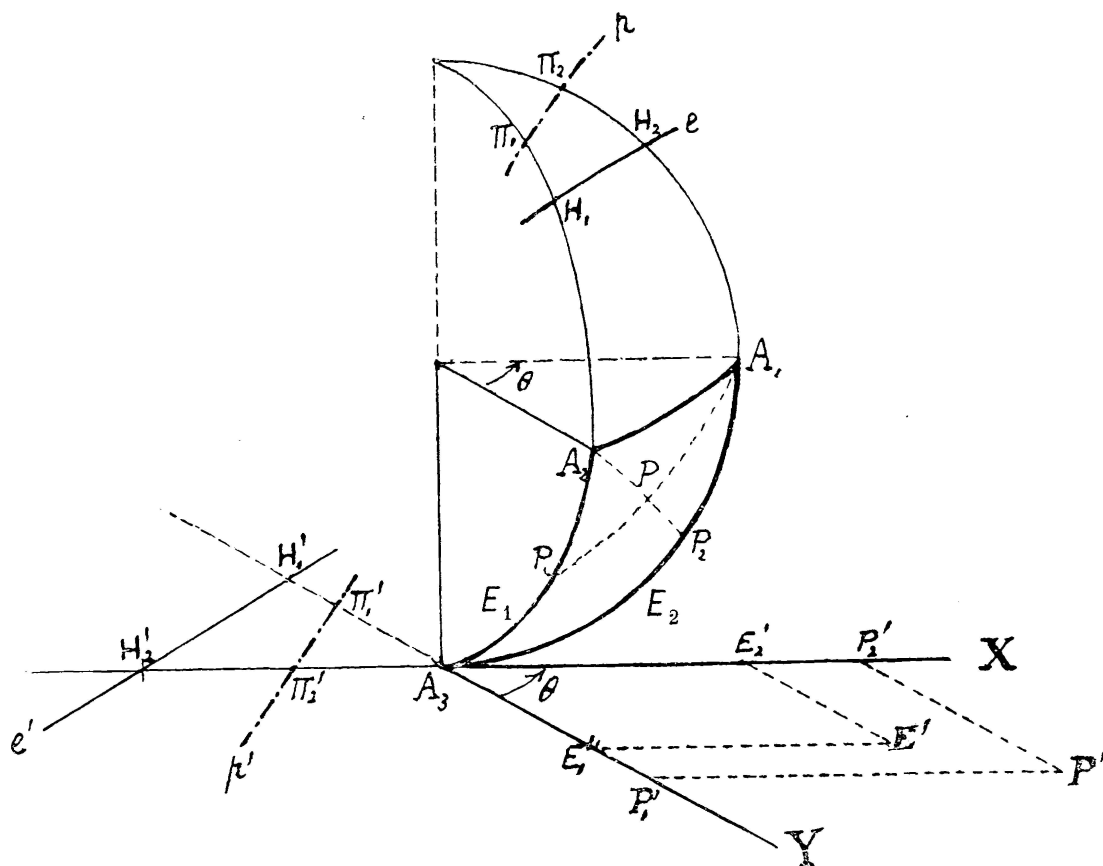


Fig. 2.

10. Prenons comme application (fig. 2) le triangle sphérique  $A_1 A_2 A_3$ , dont les côtés  $A_3 A_1$ ,  $A_1 A_2$ ,  $A_2 A_3$  sont  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\theta$ ,  $\frac{\pi}{2}$ , tandis que le point-unité  $E$  coïncide avec le point d'intersection des médianes, les projections se faisant sur le plan tangent en  $A_3$ . Dans ce cas on a  $\overline{A_3 E_1} = \overline{A_3 E_2} = \frac{\pi}{4}$  et, par conséquent, le rayon de la sphère étant l'unité,  $\overline{A_3 E'_1} = \overline{A_3 E'_2} = 1$ .

Pour trouver  $E'$ , les points  $E'_1$  et  $E'_2$  doivent être reliés à  $A'_1$  et  $A'_2$ ; mais, comme ceux-ci sont à l'infini sur les « axes »  $A_3 X$  et  $A_3 Y$ , il suffira de mener par  $E'_1$  et  $E'_2$  des parallèles

à ces axes; leur point d'intersection sera le point-unité  $E'$  de la figure plane. De même on trouve la projection  $P'$  d'un point quelconque  $P$  comme intersection des parallèles à  $A_3 X$  et  $A_3 Y$  menées par  $P'_1$  et  $P'_2$ .

Si nous appelons maintenant  $A_3 P'_1$  et  $A_3 P'_2$  les coordonnées cartésiennes  $Y$  et  $X$  du point  $P'$  par rapport aux axes obliques  $A_3 X$  et  $A_3 Y$ , le théorème démontré nous fournit les relations

$$\frac{x_1}{x_3} = (A_1 A_3 E_2 P_2) = (A'_1 A'_3 E'_2 P'_2) \equiv \frac{A'_1 E'_2}{A'_1 P'_2} \cdot \frac{A_3 P'_2}{A_3 E'_2} = \frac{A_3 P'_2}{A_3 E'_2} = X$$

$$\frac{x_2}{x_3} = (A_2 A_3 E_1 P_1) = (A'_2 A'_3 E'_1 P'_1) \equiv \frac{A'_2 E'_1}{A'_2 P'_1} \cdot \frac{A_3 P'_1}{A_3 E'_1} = \frac{A_3 P'_1}{A_3 E'_1} = Y,$$

ou encore

$$x_1 : x_2 : x_3 = X : Y : 1 ;$$

de sorte que, si  $f(x_1 x_2 x_3) = 0$  est l'équation en coordonnées trilinéaires d'une courbe sphérique par rapport au triangle sphérique de la fig. 2, le point-unité étant l'intersection des médianes, l'équation de la courbe plane correspondante en coordonnées cartésiennes par rapport aux axes obliques de la même figure sera

$$f(X, Y, 1) = 0.$$

11. Nous pouvons trouver des relations analogues entre les coordonnées tangentielles d'une droite sphérique  $p$  et celles de sa projection  $p'$ . En effet, la droite-unité  $e$  étant la polaire trilinéaire du point-unité  $E$ , il faut que <sup>1</sup>

$$E_1 H_1 = E_2 H_2 = \frac{\pi}{2}$$

si  $H_1$  et  $H_2$  sont les points d'intersection de  $e$  avec les côtés  $a_1$  et  $a_2$  du triangle sphérique. Il s'ensuit que leurs projections  $H'_1$  et  $H'_2$  seront déterminées par

$$A_3 H'_1 = A_3 H'_2 = -1.$$

Une droite quelconque  $p$  donne, avec les deux premiers

---

<sup>1</sup> Car on a  $E_2 \equiv \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3$ , par conséquent  $H_2 \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3$ , et, comme le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul, leur distance sphérique est  $\frac{\pi}{2}$ .



côtés, les points d'intersection  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$ , tandis que sa projection  $p'$  rencontre les « axes » correspondants en  $\Pi'_1$  et  $\Pi'_2$ .

Nous avons donc

$$\frac{u_1}{u_3} = (a_1 a_3 e_2 p_2) = (A_3 A_1 H_2 \Pi_2) = (A_3 A'_1 H'_2 \Pi'_2) = \frac{A_3 H'_2}{A_3 \Pi'_2} \cdot \frac{A'_1 \Pi'_2}{A'_1 H'_2} = \frac{A_3 H'_2}{A_3 \Pi'_2} = -\frac{1}{a}$$

$$\frac{u_2}{u_3} = (a_2 a_3 e_1 p_1) = (A_3 A_2 H_1 \Pi_1) = (A_3 A'_2 H'_1 \Pi'_1) = \frac{A_3 H'_1}{A_3 \Pi'_1} \cdot \frac{A'_2 \Pi'_1}{A'_2 H'_1} = \frac{A_3 H'_1}{A_3 \Pi'_1} = -\frac{1}{b},$$

ou encore

$$u_1 : u_2 : u_3 = -\frac{1}{a} : -\frac{1}{b} : 1 \equiv u : v : 1,$$

si nous désignons  $A_3 \Pi'_2$  et  $A_3 \Pi'_1$ , c'est-à-dire les distances de l'origine aux points de rencontre de la droite  $p'$  avec les axes  $A_3 X$  et  $A_3 Y$  par  $a$  et  $b$ , et si, avec Plücker, nous remplaçons  $-\frac{1}{a}$  et  $-\frac{1}{b}$  par  $u$  et  $v$ .

Si donc l'équation d'une courbe sphérique par rapport au triangle sphérique de la fig. 2 est en coordonnées trigonales

$$f(u_1, u_2, u_3) = 0,$$

l'équation de la courbe plane correspondante en coordonnées de Plücker par rapport aux axes obliques de la même figure sera

$$f(u, v, 1) = 0.$$

*Application.* L'équation d'une droite sphérique  $p$  étant

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

celle de la droite  $p'$  dans le plan est, par conséquent

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad ux + vy + 1 = 0.$$

12. Pour trouver une autre signification géométrique des coordonnées ponctuelles et tangentielles introduites, revenons aux expressions

$$x_4 \mathbf{r} = \mu_1 x_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathbf{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathbf{r}_3 \quad \text{et} \quad u_4 \mathbf{l} = \nu_1 u_1 \mathbf{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathbf{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathbf{l}_3$$

et rappelons-nous (fig. 1) que la distance sphérique du point  $\mathbf{r}$  à  $\mathbf{l}_3$  est le complément de l'arc  $\xi_3$ , tandis que la distance

de  $l$  à  $r_3$  est le complément de  $\delta_3$ . Multipliant donc les deux équations par  $l_3$  et  $r_3$ , nous obtenons

$$x_4 \sin \xi_3 = \mu_3 x_3 \sin h_3 \qquad u_4 \sin \delta_3 = \nu_3 u_3 \sin h_3 \quad ,$$

d'où nous concluons facilement

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{\sin \xi_1}{\mu_1 \sin h_1} : \frac{\sin \xi_2}{\mu_2 \sin h_2} : \frac{\sin \xi_3}{\mu_3 \sin h_3}$$

et

$$u_1 : u_2 : u_3 = \frac{\sin \delta_1}{\nu_1 \sin h_1} : \frac{\sin \delta_2}{\nu_2 \sin h_2} : \frac{\sin \delta_3}{\nu_3 \sin h_3} \quad ,$$

si  $\xi_i$  sont les distances sphériques du point  $P$  aux trois côtés et  $\delta_i$  les distances sphériques de la droite  $p$  aux trois sommets du triangle de référence.

En faisant coïncider le point-unité avec l'intersection des médianes, c'est-à-dire en prenant  $\mu_i = 1$ , nous devons pour satisfaire aux équations (9) prendre les coefficients  $\nu_i$  de manière à ce que  $\nu_i \sin h_i$  devienne constant. Nos proportions se simplifient par ces suppositions, et si nous passons encore de la sphère au plan, où le rapport de deux sinus devient le rapport des arcs correspondants, nous aurons

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{\xi_1}{h_1} : \frac{\xi_2}{h_2} : \frac{\xi_3}{h_3}$$

$$u_1 : u_2 : u_3 = \delta_1 : \delta_2 : \delta_3 \quad ;$$

de sorte que l'équation d'une droite plane (et d'un point) en coordonnées trilineaires devient

$$\frac{\delta_1}{h_1} \xi_1 + \frac{\delta_2}{h_2} \xi_2 + \frac{\delta_3}{h_3} \xi_3 = 0 \quad .$$

### 13. Passons au cercle sphérique.

Toutes les droites  $u_i$  qui ont la même distance  $\varrho$  d'un point fixe  $y_i$  enveloppent un cercle sphérique dont l'équation est

Tous les points  $x_i$  qui ont la même distance  $\theta$  d'une droite sphérique  $v_i$  sont sur un cercle sphérique dont l'équation est

$$(\mu_1 y_1 r_1 + \mu_2 y_2 r_2 + \mu_3 y_3 r_3) (\nu_1 u_1 l_1 + \nu_2 u_2 l_2 + \nu_3 u_3 l_3) = y_4 u_4 \sin \rho \quad ; \quad ]$$

$$[ (\nu_1 v_1 l_1 + \nu_2 v_2 l_2 + \nu_3 v_3 l_3) (\mu_1 x_1 r_1 + \mu_2 x_2 r_2 + \mu_3 x_3 r_3) = v_4 x_4 \cos \rho \quad ;$$

ou encore :

$$(10) \quad (y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3) \Delta - y_4 u_4 \sin \rho = 0,$$

car les tenseurs des deux vecteurs dont nous avons formé le produit scalaire sont  $y_4$  et  $u_4$ , tandis que leur distance sphérique est  $\frac{\pi}{2} - \varrho$ .

L'équation (10) du cercle en coordonnées tangentielles  $u_i$  est en réalité *du second degré*, parce qu'elle contient

$$u_4 \equiv \sqrt{\Omega(u_1 u_2 u_3)}.$$

Si l'on y pose  $\varrho = 0$ , on retombe sur l'équation bien connue du point  $y_i$ .

14. Il est évident que réciproquement toute équation en coordonnées tangentielles de la forme<sup>1</sup>:

$$B_1 u_1 + B_2 u_2 + B_3 u_3 + B_4 u_4 = 0$$

représente un cercle sphérique dont on détermine le centre  $y_i$  et le rayon  $\varrho$  par la comparaison avec l'équation (10), donnant

$$y_1 \Delta = B_1; y_2 \Delta = B_2; y_3 \Delta = B_3; \\ y_4 \sin \rho = -B_4;$$

ce qui nous permet de dire que

$$\mu_1 B_1 r_1 + \mu_2 B_2 r_2 + \mu_3 B_3 r_3$$

est le centre, et que le rayon se trouve par

$$\sin \rho = - \frac{B_4 \Delta}{\sqrt{\Omega(B_1 B_2 B_3)}}.$$

ou encore :

$$(11) \quad (v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3) \Delta - v_4 x_4 \cos \rho = 0,$$

car les tenseurs des deux vecteurs dont nous avons formé le produit scalaire sont  $v_4$  et  $x_4$ , tandis que leur distance sphérique est  $\varrho = \frac{\pi}{2} - \theta$ .

L'équation (11) du cercle en coordonnées ponctuelles  $x_i$  est en réalité *du second degré*, parce qu'elle contient

$$x_4 \equiv \sqrt{\omega(x_1 x_2 x_3)}.$$

Si l'on y pose  $\theta = \frac{\pi}{2} - \varrho = 0$ , on retombe sur l'équation bien connue de la droite  $v_i$ .

Il est évident que toute équation en coordonnées ponctuelles de la forme<sup>1</sup>:

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = 0$$

représente un cercle sphérique dont le centre et le rayon se trouvent par la comparaison avec l'équation (11), donnant

$$v_1 \Delta = b_1; v_2 \Delta = b_2; v_3 \Delta = b_3; \\ v_4 \cos \rho = -b_4;$$

ce qui nous permet de dire que<sup>2</sup>

$$v_1 b_1 l_1 + v_2 b_2 l_2 + v_3 b_3 l_3$$

est le centre, et que le rayon se trouve par

$$\cos \rho = - \frac{b_4 \Delta}{\sqrt{\Omega(b_1 b_2 b_3)}}.$$

<sup>1</sup> Il est à remarquer que, dans cette équation, les coefficients sont indépendants entre eux,  $B_4$  et  $b_4$  ne sont donc nullement  $\sqrt{\Omega(B_1 B_2 B_3)}$  et  $\sqrt{\omega(b_1 b_2 b_3)}$ .

<sup>2</sup> Si nous appelons  $\Omega'(b_i)$  la dérivée de  $\Omega(b_1 b_2 b_3)$  par rapport à  $b_i$ , cette expression pour le centre peut encore s'écrire  $\mu_1 \Omega'(b_1) \cdot r_1 + \mu_2 \Omega'(b_2) \cdot r_2 + \mu_3 \Omega'(b_3) \cdot r_3$ .

15. En partant des équations (10) et (11), il est facile de voir que les équations des circonférences sphériques tangentes aux trois droites non-concourantes  $v_i, w_i, r_i$  ou passant par trois points  $y_i, z_i, t_i$ , qui ne sont pas sur la même droite sphérique, seront

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} = 0 .$$

16. Exemples. — *Cercle inscrit.* Dans ce cas, les trois droites données sont les côtés du triangle, dont les coordonnées sont  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ , tandis que les éléments correspondants dans la dernière colonne du déterminant deviennent  $v_1, v_2, v_3$ . L'équation du cercle inscrit en coordonnées tangentielles est, par conséquent :

*Cercle circonscrit.* Dans ce cas, les trois points donnés sont les sommets du triangle, dont les coordonnées sont  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ , tandis que les éléments correspondants dans la dernière colonne du déterminant deviennent  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ . L'équation du cercle circonscrit en coordonnées ponctuelles est donc

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_3 \end{vmatrix} \equiv v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3 - u_4 = 0 . \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 0 & 0 & \mu_1 \\ 0 & 1 & 0 & \mu_2 \\ 0 & 0 & 1 & \mu_3 \end{vmatrix} \equiv \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 - x_4 = 0 .$$

Il est évident que ces équations peuvent encore s'écrire

$$(v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3)^2 - \Omega(u_1 u_2 u_3) = 0 ; \quad (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3)^2 - \omega(x_1 x_2 x_3) = 0 ;$$

ce qui, développé, donne

$$\frac{u_2 u_3}{v_1} \sin^2 \frac{A_1}{2} + \frac{u_3 u_1}{v_2} \sin^2 \frac{A_2}{2} + \frac{u_1 u_2}{v_3} \sin^2 \frac{A_3}{2} = 0 ;$$

$$\frac{x_2 x_3}{\mu_1} \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} + \frac{x_3 x_1}{\mu_2} \sin^2 \frac{\alpha_2}{2} + \frac{x_1 x_2}{\mu_3} \sin^2 \frac{\alpha_3}{2} = 0 .$$

Les centres sont

$$\mu_1 v_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 v_2 \mathbf{r}_2 + \mu_3 v_3 \mathbf{r}_3 \quad \text{et} \quad v_1 \mu_1 \mathbf{l}_1 + v_2 \mu_2 \mathbf{l}_2 + v_3 \mu_3 \mathbf{l}_3 \quad \text{ou} \\ \mu_1 \Omega'(u_1) \mathbf{r}_1 + \mu_2 \Omega'(\mu_2) \mathbf{r}_2 + \mu_3 \Omega'(\mu_3) \mathbf{r}_3 ,$$

tandis que les rayons se trouvent par les formules

$$\sin r = \frac{\Delta}{\sqrt{\omega(\nu_1 \nu_2 \nu_3)}} ; \quad \cos R = \frac{\Delta}{\sqrt{\Omega(\mu_1 \mu_2 \mu_3)}} .$$

Enfin, si nous prenons  $\mu_i = 1$  et  $\nu_i = \sin A_i$ , c'est-à-dire si nous prenons l'intersection des médianes comme point d'unité, les équations précédentes deviennent

$$u_2 u_3 \operatorname{tg} \frac{A_1}{2} + u_3 u_1 \operatorname{tg} \frac{A_2}{2} + u_1 u_2 \operatorname{tg} \frac{A_3}{2} = 0 ;$$

$$x_2 x_3 \sin^2 \frac{a_1}{2} + x_3 x_1 \sin^2 \frac{a_2}{2} + x_1 x_2 \sin^2 \frac{a_3}{2} = 0 .$$

Pour le *plan*, l'équation du cercle inscrit restera en coordonnées barycentriques

$$u_2 u_3 \operatorname{tg} \frac{A_1}{2} + u_3 u_1 \operatorname{tg} \frac{A_2}{2} + u_1 u_2 \operatorname{tg} \frac{A_3}{2} = 0 ,$$

tandis que celle du cercle circonscrit devient

$$a_1^2 x_2 x_3 + a_2^2 x_3 x_1 + a_3^2 x_1 x_2 = 0 .$$

M.-Fr. DANIËLS (Fribourg, Suisse).

## DÉTERMINATION DES AXES D'UNE HYPERBOLE

DONT DEUX DIAMÈTRES CONJUGUÉS SONT DONNÉS

On connaît beaucoup de constructions des axes d'une ellipse, dont deux diamètres conjugués sont donnés. L'une des plus récentes et des plus fécondes est celle qui est due à M. MANHEIM<sup>1</sup>. Moins nombreuses sont les solutions de la même question pour l'hyperbole. Mais on peut résoudre cette dernière question avec la même facilité que la première, si l'on regarde une hyperbole quelconque comme projection

<sup>1</sup> *Nouv. Annales de Mathématiques*, 1904, janvier.