Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 7 (1905)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA GÉOMÉTRIE ET LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUES

Autor: Levi, Beppo

Kapitel: II. Trigonométrie sphérique et goniométrie.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-8431

des quadrilatères tels que ABB_1A_1 et à la somme des aires des pentagones tels que $AMBB_1A_1$.

5. Formons la figure polaire de celle du numéro précédent. Nous obtenons un cercle de centre O, ayant pour rayon le complément du rayon du cercle donné, et un système de polygones réguliers inscrits et circonscrits à celui-ci. Le périmètre de chacun de ces polygones est la différence entre une circonférence de grand-cercle et l'aire du polygone polaire. Les conclusions du numéro précédent montrent alors que *les périmètres des polygones réguliers inscrits et circonscrits à un cercle tendent vers une limite commune lorsque le nombre de leurs côtés croît indéfiniment.* Il est naturel d'appeler cette limite la *longueur de la circonférence* du cercle considéré : elle est égale à la différence entre la circonférence de grand-cercle et l'aire de la calotte limitée par le cercle polaire ; donc (d'après le n° 4) *la longueur d'une circonférence est égale à l'aire de la zone comprise entre le cercle polaire et le grand-cercle ayant même centre* [1].

II. *Trigonométrie sphérique et goniométrie.*

6. Si ρ est un arc de grand-cercle *on appelle* $\sin \rho$ *la longueur de la circonférence* [2] *de rayon* ρ.

Le sinus d'un arc est une fonction croissante et continue de cet arc. Rappelons en effet (n° 5) que $\sin \rho$ représente aussi l'aire d'une zone qui a pour base un grand-cercle et pour hauteur ρ ; on déduit immédiatement qu'il est une fonction croissante de ρ. Soit Γ la base mineure de la zone ; considérons le polygone régulier ABC... inscrit dans Γ (fig. 1), le cercle Γ_1 inscrit dans ce polygone et le polygone M_1N_1... inscrit dans Γ_1, dont les sommets sont les points de contact de Γ_1

[1] A comparer avec le théorème connu, de la proportionalité entre les zones et leur hauteur.

[2] On doit remarquer qu'il n'a été dit nulle part quel était le rayon de la sphère ; on a dit seulement qu'on opérait sur une sphère fixe. Quand on reste dans l'hypothèse euclidienne, que l'on prenne la longueur de ce rayon égale à $\frac{1}{2\pi}$, et l'on aura l'accord complet entre notre définition du sinus et l'ordinaire.

avec ABC... La différence entre la zone considérée de hauteur ρ et la zone limitée par Γ_1 et le même grand-cercle est la zone comprise entre Γ et Γ_1 et est moindre que la différence entre les aires des polygones MNP..., $M_1N_1P_1$... l'un circonscrit à Γ, l'autre inscrit dans Γ_1. Cette différence est la somme des triangles ABM, BCN,..., M_1N_1B, M_1P_1C,... et on voit, comme au n° 4, qu'elle devient aussi petite que l'on veut si l'on augmente suffisamment le nombre des côtés de ABC...

La différence entre les aires de deux zones de hauteurs ρ et $\rho + \Delta\rho$ peut donc devenir aussi petite que l'on veut; de là, et de l'observation que $\sin\rho$ est une fonction croissante, on déduit qu'elle est aussi continue.

7. Soit Γ un cercle de centre O, Δ le grand-cercle concentrique, γ le cercle polaire de Γ, ρ la hauteur de la zone $(\Gamma\Delta)$. Appelons, comme d'usage, $\frac{\pi}{2}$ le cadrant ; la hauteur de la zone $(\gamma\Delta)$ est $\frac{\pi}{2}-\rho$. Soit Γ_1, un cercle de centre O et de rayon $\frac{\pi}{2}-(\rho+\delta\rho)$ de sorte que la zone $(\Gamma_1\Delta)$ ait la hauteur $\rho + \delta\rho$ et soit γ_1 le cercle polaire de Γ_1. Nous voulons comparer la différence des aires des zones $(\Gamma\Delta)$, $(\Gamma_1\Delta)$ avec celle des zones $(\gamma\Delta)$, $(\gamma_1\Delta)$, c'est-à-dire les aires des zones $(\Gamma\Gamma_1)$, $(\gamma\gamma_1)$.

Ces deux zones ont même hauteur $\delta\rho$. Circonscrivons à Γ et à Γ_1 deux polygones réguliers, de même nombre de côtés, et ayant les sommets sur les mêmes grands-arcs passant par O. Nous pouvons supposer les côtés de ces polygones si petits que: 1° les aires comprises entre Δ et ces polygones soient approximées autant que l'on veut aux aires des deux zones $(\Gamma\Delta)$ $(\Gamma_1\Delta)$, et par conséquent l'aire comprise entre les polygones aussi peu différente que l'on veut de l'aire de la zone $(\Gamma\Gamma_1)$; 2° si l'on circonscrit à γ un polygone dont tous les côtés, sauf un au plus, soient égaux aux côtés du polygone circonscrit à Γ, et à γ_1 le polygone qui a les sommets sur les mêmes rayons par O que le précédent, l'aire comprise entre les deux polygones diffère encore aussi peu que l'on veut de l'aire de la zone $(\gamma\gamma_1)$, même si on néglige la partie comprise entre les deux côtés différents et les arcs passant par O et par leurs sommets. Les rayons sortant de O et passant par les sommets des deux figures polygonales qu'on substitue ainsi aux zones $(\Gamma\Gamma_1)$, $(\gamma\gamma_1)$ les décomposent en trapèzes isoscèles, tous de même hauteur $\delta\rho$, et avec une base égale; l'autre base est plus grande que celle-ci pour les trapèzes relatifs à $(\gamma\gamma_1)$, plus petite pour les trapèzes relatifs à $(\Gamma\Gamma_1)$. Si donc on pense que l'on transporte chaque trapèze relatif à $(\Gamma\Gamma_1)$ sur un trapèze relatif à $(\gamma\gamma_1)$ on voit que *le rapport entre les aires des deux figures polygonales relatives à* $(\Gamma\Gamma_1)$ *et à* $(\gamma\gamma_1)$ *est plus petit que le rapport des longueurs des périmètres des polygones circonscrits à* Γ *et à* γ.

On peut répéter les mêmes considérations en choisissant les côtés du polygone circonscrit à γ_1 égaux aux côtés du polygone circonscrit à Γ_1; alors ce sont les trapèzes relatifs à la zone $(\Gamma\Gamma_1)$ qui sont plus grands que les trapèzes relatifs à la zone $(\gamma\gamma_1)$ et par suite *le rapport entre les aires des deux figures polygonales relatives à* $(\Gamma\Gamma_1)$ *et à* $(\gamma\gamma_1)$ *est plus grand que le rapport des longueurs des périmètres des polygones circonscrits à* Γ_1 *et à* γ_1.

Faisons croître indéfiniment le nombre des côtés des polygones considérés; nous aurons à la limite que *le rapport entre les aires des deux zones* $(\Gamma\Gamma_1)$, $(\gamma\gamma_1)$ *est compris entre le rapport des longueurs des circonférences* Γ, γ *et le rapport des longueurs des circonférences* Γ_1, γ_1.

Supposons enfin que $\delta\rho$ diminue indéfiniment; à cause de la continuité du sinus (n° 6) les longueurs de Γ_1, γ_1 tendent vers les longueurs de Γ, γ; on a donc à la limite

$$\lim_{\delta\rho = o} \frac{\text{aire } (\Gamma\Gamma_1)}{\text{aire } (\gamma\gamma_1)} = \frac{\text{long. } \Gamma}{\text{long. } \gamma} = \frac{\text{aire } (\gamma\Delta)}{\text{aire } (\Gamma\Delta)},$$

c'est-à-dire

$$\lim_{\delta\rho = o} \frac{\delta \text{ aire } (\Gamma\Delta)}{\delta \text{ aire } (\gamma\Delta)} = \frac{\text{aire } (\gamma\Delta)}{\text{aire } (\Gamma\Delta)},$$

ou bien encore

$$\lim_{\delta\rho = o} \frac{\delta \sin \rho}{\delta \sin \left(\dfrac{\pi}{2} - \rho\right)} = \frac{\sin \left(\dfrac{\pi}{2} - \rho\right)}{\sin \rho}.$$

Si donc x et y sont les sinus de deux arcs complémentaires, ils satisfont à l'équation différentielle

$$\left|\frac{\delta x}{\delta y}\right| = \frac{y}{x},$$

On détermine mieux cette équation quand on observe que x décroît lorsque y croît ; donc

$$\frac{\delta x}{\delta y} = -\frac{y}{x}.$$

ou bien

$$x\delta x + y\delta y = 0$$

et, en intégrant,

$$x^2 + y^2 = \text{const.}$$

On détermine la constante en considérant le cas de $\rho = \pi$. Alors Γ se réduit à O, γ coïncide avec Δ et l'on voit que la constante vaut 1.

$$x^2 + y^2 = 1.$$

C'est la formule fondamentale

$$\sin^2\rho + \cos^2\rho = 1. \tag{1}$$

8. Soit encore Γ un cercle de centre O, Δ le grand-cercle concentrique, et soit Γ_1 un cercle de centre O intérieur à la zone $(\Gamma\Delta)$ (fig. 2). Soit MNP... un polygone régulier circonscrit à Γ, ABC... ses points de contact. Prolongeons les arcs AM, MBN, NCP,... tous du même côté jusqu'à la rencontre de Δ, respectivement en A_1, B_1, C_1,... et de Γ_1 en A_2, B_2, C_2,... L'aire de la zone $(\Gamma\Delta)$ est, d'après le n° 4, la limite de la somme des triangles MA_1B_1, NB_1C_1,... lorsque le nombre des côtés du polygone croît indéfiniment : d'autre côté l'aire de la zone $(\Gamma_1\Delta)$ est la somme des aires $A_2A_1B_1B_2$, $B_2B_1C_1C_2$,...

Avec les points M, N, P,... comme centres décrivons les arcs $B_2A'_2$, $C_2B'_2$,... et les arcs $A_1B'_1$, $B_1C'_1$,... ; observons que toutes les figures contenues dans les triangles MA_1B_1, NB_1C_1,... sont égales entre elles ; nous obtenons

$$\frac{\text{aire }(MNP\ldots,\ \Delta)}{\text{aire }(\Gamma_1,\ \Delta)} < \frac{\text{aire }(MA_1B'_1)}{\text{aire }(A'_2A_1B'_1B_2)} = \frac{\Sigma\text{ aire }(MA_1B'_1)}{\Sigma\text{ aire }(A'_2A_1B'_1B_2)}.$$

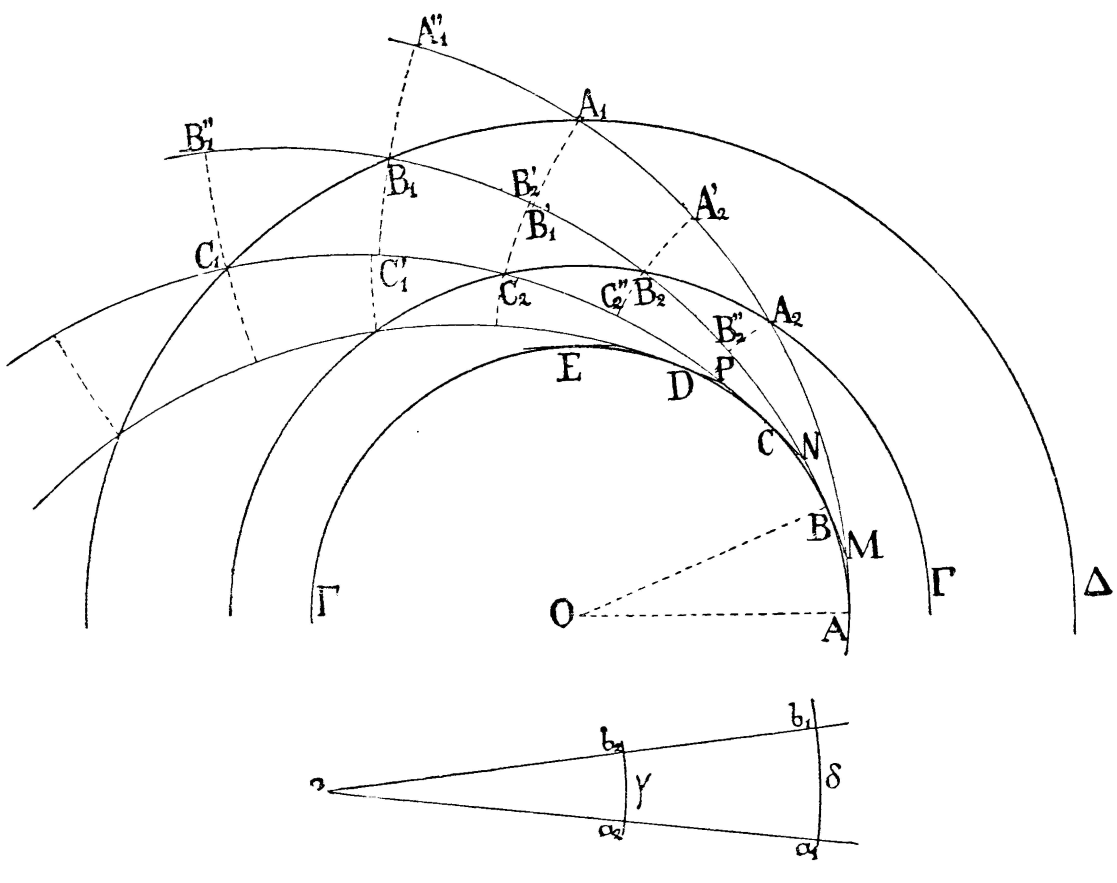

Fig. 2.

Avec les mêmes centres décrivons les arcs $A_2B''_2$, $B_2C''_2$.... et les arcs $B_1A''_1$, $C_1B''_1$... ; nous obtenons de même

$$\frac{\text{aire}\,(MNP\ldots,\,\Delta)}{\text{aire}\,(\Gamma_1,\,\Delta)} > \frac{\text{aire}\,(MA''_1B_1)}{\text{aire}\,(A_2A''_1B_1B''_2)} = \frac{\Sigma\ \text{aire}\,(MA''_1B_1)}{\Sigma\ \text{aire}\,(A_2A''_1B_1B''_2)}\,.$$

Les seconds membres de ces inégalités ont même limite lorsque le nombre des côtés du polygone croît indéfiniment : en effet, l'angle A_1MB_1 a pour mesure l'arc qu'on doit enlever à l'arc équatorial de AOB pour avoir l'aire du quadrilatère AOBM. Il est donc $<$ AOB et par suite la somme des aires $A_2A'_2B_2B''_2$, est plus petite que la zone dont les deux bases ont pour rayons MA_2 et MB_2 et dont la hauteur est 2 AM. Elle tend donc à zéro avec cette hauteur (n° 6); de même la somme des aires $A_1A''_1B_1B''_1$ tend vers 0.

Alors

$$\frac{\text{aire}\,(\Gamma,\,\Delta)}{\text{aire}\,(\Gamma_1,\,\Delta)} = \lim \frac{\text{aire}\,(MA_1B'_1)}{\text{aire}\,(A'_2A_1B'_1B_2)} = \lim \frac{\text{aire}\,(MA''_1B_1)}{\text{aire}\,(A_2A''_1B_1B''_2)}\,.$$

Remarquons que AA_1, BB_1,... sont égaux chacun à un cadrant ; considérons alors la figure constituée d'un grand-cercle δ et d'un cercle concentrique γ de rayon AA_2 : pour plus d'évidence considérons de cette figure seulement la partie comprise entre deux rayons formant un angle égal à A_1MB_1 : soit $oa_1b_1a_2b_2$: on voit immédiatement que

$$\frac{\text{aire }(MA_1B'_1)}{\text{aire }(A'_2A_1B'_1B_2)} > \frac{\text{aire }(oa_1b_1)}{\text{aire }(a_2a_1b_1b_2)} > \frac{\text{aire }(MA''_1B_1)}{\text{aire }(A_2A''_1B_1B''_2)} .$$

Or

$$\frac{\text{aire }(oa_1b_1)}{\text{aire }(a_2a_1b_1b_2)} = \frac{\text{aire hémisphère}}{\text{aire }(\gamma\delta)} = \frac{1}{\text{aire }(\gamma\delta)} .$$

Donc enfin, en rapprochant ces égalités des précédentes :

$$\frac{\text{aire }(\Gamma\Delta)}{\text{aire }(\Gamma_1\Delta)} = \frac{1}{\text{aire }(\gamma\delta)} .$$

Appelons ρ la hauteur de $(\Gamma\Delta)$, ρ_1 celle de $(\Gamma_1\Delta)$; cette égalité peut s'écrire

$$\frac{\sin\rho}{\sin\rho_1} = \frac{1}{\sin A_1A_2} .$$

9. Soit ABC un triangle rectangle (fig. 3), C son angle droit; soit Δ le grand-cercle de centre A, et soient Γ, Γ_1 les cercles de centre A passant par C et par B. Appelons a, b, c les côtés du triangle, opposés aux sommets A, B, C. Nous pouvons appliquer la formule précédente, où ρ, ρ_1 et A_1A_2 auront respectivement les valeurs $\frac{\pi}{2} - b$, $\frac{\pi}{2} - c$, $\frac{\pi}{2} - a$;

donc $\quad \dfrac{\cos b}{\cos c} = \dfrac{1}{\cos a}$.

ou bien

$$\cos c = \cos a \cos b . \qquad (2)$$

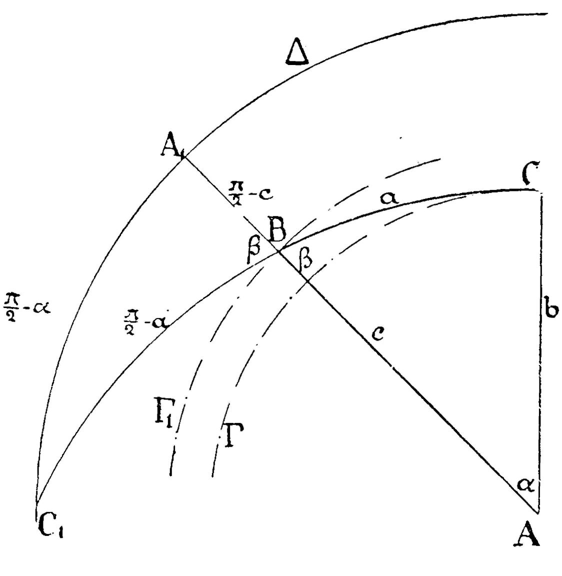

Fig. 3.

C'est la formule fondamentale pour les triangles rectangles.

Soient A_1 et C_1 les points de rencontre avec Δ des demi grands-cercles qui projettent B de A et de C ; appelons α' β les mesures des angles A et B dans le triangle ABC ; dans le triangle A_1BC_1 on a :

$$A_1C_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha,\ A_1B = \frac{\pi}{2} - c,\ BC_1 = \frac{\pi}{2} - a,\ \text{angle } B = \beta.$$

En appliquant la formule (2) à ce triangle on obtient donc

$$\sin a = \sin c \sin \alpha, \tag{3}$$

et,en appliquant au même triangle cette nouvelle formule (3),

$$\cos \alpha = \cos a \sin \beta. \tag{4}$$

Dans les formules (2) (3) (4) se résume toute la trigonométrie des triangles rectangles. D'après des procédés connus on en tire encore toute entière la trigonométrie sphérique, pourvu que l'on possède la formule pour la somme des arcs. C'est cette formule que nous allons maintenant nous procurer.

10. Il est connu qu'il suffit de l'établir dans l'hypothèse que la somme des arcs soit $< \frac{\pi}{2}$. Soit alors ABC un triangle rectangle en C et soit CD sa hauteur (fig. 4). Posons $AD = a$, $BD = b$, $AC = m$, $BC = n$, $CAB = \alpha$, $CBA = \beta$, $ACD = \gamma$ et, par conséquence, $BCD = \frac{\pi}{2} - \gamma$. En appliquant les formules (3) et (4) aux triangles ABC, ACD, BCD, on obtient

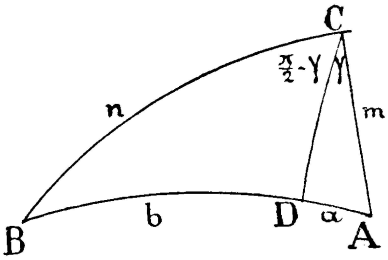

Fig. 4.

$$\sin(a+b) = \frac{\sin n}{\sin \alpha} = \frac{\sin m}{\sin \beta},$$

$$\sin a = \sin m \sin \gamma, \qquad \sin b = \sin n \cos \gamma$$

$$\cos a = \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha}, \qquad \cos b = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta};$$

d'où

$$\sin a \cos b = \frac{\sin m}{\sin \beta} \sin^2 \gamma = \sin(a+b) \sin^2 \gamma$$

$$\sin b \cos a = \frac{\sin n}{\sin \alpha} \cos^2 \gamma = \sin(a+b) \cos^2 \gamma$$

et, à cause de la formule (1),

$$\sin a \cos b + \sin b \cos a = \sin(a+b). \tag{5}$$

C'est la formule pour la somme des arcs : afin que sa démonstration soit généralement valable, il suffit de remarquer que, par suite de la continuité du sinus (nº 6), il existe toujours un triangle rectangle dans lequel la hauteur abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse divise celle-ci en deux segments donnés (dont la somme soit $< \frac{\pi}{2}$). Des formules du triangle rectangle, en effet, on tire aisément que, les lettres conservant les mêmes significations que ci-dessus, on a, dans le triangle rectangle ABC,

$$\operatorname{tg} AD = \operatorname{tg} AB \cos^2 \alpha.$$

Or de la continuité du sinus il suit immédiatement aussi la continuité de la tangente et du cosinus : si donc AB restant constant, on fait croître avec continuité α de 0 à $\frac{\pi}{2}$, AD variera avec continuité entre AB et 0 et passera par toute valeur, arbitrairement assignée, de $a <$ AB.

BEPPO LEVI (Plaisance, Italie).

P. S. — Cet article fut envoyé à la rédaction en août 1904. Tout récemment a paru dans les *Mathematischen Annalen* (Bd. 60) une note de M. DEHN où l'auteur donne une démonstration nouvelle de l'équivalence par réunion de parties égales des polygones ayant même excès sphérique, indépendamment du postulatum de la continuité.

A cette occasion je donne encore quelques autres références bibliographiques, dont je n'ai eu connaissance qu'après avoir corrigé les épreuves de l'article. Dans les *Collectanea* de M. ENRIQUES: