

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 7 (1905)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA GÉOMÉTRIE ET LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUES
Autor: Levi, Beppo
Kapitel: I. Géométrie sphérique.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-8431>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

générale, mais qu'il en ressort beaucoup de lumière sur certains théorèmes connus de la géométrie sphérique.

Les figures seront toujours décrites sur une sphère fixe : si A et B sont deux points de la sphère, le *grand-arc* AB sera l'arc de grand-cercle compris entre A et B et plus petit qu'une demi-circonférence. Deux points d'un grand-cercle seront du même côté d'un point donné sur ce cercle, s'ils appartiennent à la même demi-circonférence ayant ce point comme origine.

I. Géométrie sphérique.

1. Soit BC un arc de grand-cercle, A un de ses pôles. L'angle ABC est droit — Soit C' le point opposé de C et D un point de la demi-circonférence CAC'; l'angle DBC sera plus grand ou plus petit que ABC selon que DC est plus grand ou plus petit que AC. Donc *dans un triangle rectangle l'angle opposé à l'un des côtés de l'angle droit est plus grand ou plus petit qu'un droit en même temps que ce côté est plus grand ou plus petit qu'un quadrant.*

On déduit que dans un triangle rectangle la somme des trois angles est supérieure à deux angles droits. Pas de doute, en effet, si un des côtés de l'angle droit est plus grand qu'un quadrant : l'angle opposé est plus grand qu'un angle droit, et la somme de cet angle avec l'angle droit du triangle est déjà supérieure à deux droits.

Si ABC est un triangle, rectangle en A, dont les côtés AB AC sont moindres qu'un quadrant, soit D le milieu de BC et soit D₁ le pied du grand-arc perpendiculaire de D à BA. Sur le cercle DD₁ que l'on porte DD₂ = DD₁. Les deux triangles BDD₁, CDD₂ sont égaux, ayant les angles en D et les côtés qui les forment égaux : donc l'angle CD₂D est droit et le cercle CD₂ passe par les pôles de DD₁. Soit P le pôle qui est, par rapport à D₁, du même côté que B : PA sera plus grand qu'un quadrant et par suite PCA obtus. Mais PCB = CBA ; donc CBA + BCA + CAB > 2 angles droits.

Tout triangle ABC a au moins deux angles de même espèce (obtus ou aigus) : soient A et B. Le demi-grand-cercle passant

par C et perpendiculaire à AB, est divisé par C en deux arcs dont l'un (plus grand ou plus petit qu'un quadrant selon que A et B sont obtus ou aigus) est alors intérieur à A et à B et par suite au triangle. Il décomposera le triangle en deux triangles rectangles; dans chacun la somme des angles est supérieure à deux droits; il s'ensuit que dans *tout triangle sphérique la somme des trois angles est supérieure à deux angles droits*.

En décomposant un polygone sphérique en triangles on étend la proposition aux polygones, de la manière connue.

2. En appliquant la proposition au triangle polaire d'un triangle donné on déduit que *la somme des trois côtés d'un triangle sphérique est inférieure à quatre angles droits*. Si alors ABC est un triangle sphérique, et A' est le point opposé de A, de la relation

$$A'B + A'C + BC < 4 \text{ angles droits,}$$

on tire que

$$BC < AB + AC,$$

c'est-à-dire que *dans un triangle un côté est plus petit que la somme des deux autres*. Les théorèmes sur les relations entre les côtés et les angles opposés, sur les arcs perpendiculaires et obliques d'un point à un grand-cercle, etc., se démontrent alors suivant les méthodes ordinaires. Nous rappelons, en particulier, l'observation suivante que nous devons appliquer: Soient AB, AC deux arcs, égaux ou moindres qu'un quadrant, et formant entr'eux un angle aigu. Soit P le pôle de AB du côté de AC, et supposons que PB passe par C, soit PC₁B₁ un grand-arc, qui rencontre AB et AC en B₁ et C₁ respectivement. On a PB₁ = PB = 1 quadrant, PC₁ > PC; donc B₁C₁ < BC; c'est-à-dire: *dans un triangle rectangle dont les côtés sont moindres qu'un quadrant et dont un angle aigu est invariable, les trois côtés croissent et décroissent ensemble*.

3. Nous appelons AIRE D'UN POLYGONE l'arc équatorial d'un fuseau dont l'angle soit égal à la différence entre la somme

*des angles du polygone et autant de fois deux angles droits qu'il a de côtés, moins deux*¹.

Si l'on divise un côté d'un polygone en deux par un point, et on considère ce point comme sommet d'un angle égal à deux droits, l'aire du polygone reste inaltérée. Si deux polygones s'adaptent l'un à l'autre le long d'une ligne brisée formée de k côtés, $k-1$ sommets intérieurs et 2 sommets extrêmes (si sur l'un des polygones un de ces sommets est un point d'un côté, on le considérera comme sommet d'un angle du polygone égal à deux droits), leur ensemble est un nouveau polygone qui a autant de côtés que la somme des nombres des côtés des deux polygones donnés diminuée de $2k$, et dans lequel la somme des angles est égale à la somme des angles de ces polygones diminuée de $2(k-1) \times 2$ droits. Il s'ensuit que l'aire du polygone total est la somme des aires des deux polygones. De là, *si un polygone est décomposé d'une manière quelconque en polygones partiels, son aire est égale à la somme des aires de ces polygones.*

4. Considérons sur la sphère un cercle de centre O ; soit $ABC...$ un polygone régulier inscrit (fig. 1) et $MN...$ le polygone circonscrit qui touche la circonférence en $A, B, C, ...$. Soient $A_1, B_1, ...$, les points où les demi-grand-cercles partant de O et contenant $A, B, ...$ rencontrent le grand-cercle de centre O . Les arcs $AB, BC, ...$ sont plus petits, respectivement, que $A_1B_1, B_1C_1, ...$ (d'après le n° 2). Le périmètre du polygone $ABC...$ est donc plus petit que la circonférence d'un grand cercle. Si alors on développe ce polygone le long d'un grand cercle et on transporte avec ses côtés les triangles $ABM, BCN, ...$ compris entre le polygone inscrit et le polygone circonscrit, on voit que la somme de ces triangles est toute intérieure à deux fuseaux ayant l'angle égal à MAB . La somme des aires de ces triangles est donc inférieure à la somme des aires de ces fuseaux, c'est-à-dire à quatre fois l'arc équatorial de l'un d'eux.

¹ Nous évitons ainsi la question de l'équivalence entre le polygone et le fuseau au point de vue de la composition par réunion de parties égales. Cette question a d'ailleurs déjà été résolue fort élégamment par l'affirmative par M. GÉRARD. V. Thèse : *Sur la géométrie non-euclidienne*, p. 105, et NIEWENGLOWSKI et GÉRARD : *Géométrie dans l'espace*, p. 239.

Que l'on observe maintenant que $MAB + BAO = 1$ angle droit, tandis que, dans le triangle rectangle AOM_1 , $BAO + AOM > 1$ angle droit; il résulte $MAB < AOM$. Si donc on fait augmenter suffisamment le nombre des côtés du polygone $ABC\dots$, on peut rendre l'angle MAB plus petit que tout angle assigné et par suite la somme des aires des triangles ABM, BCN, \dots plus petite que toute aire assignée.

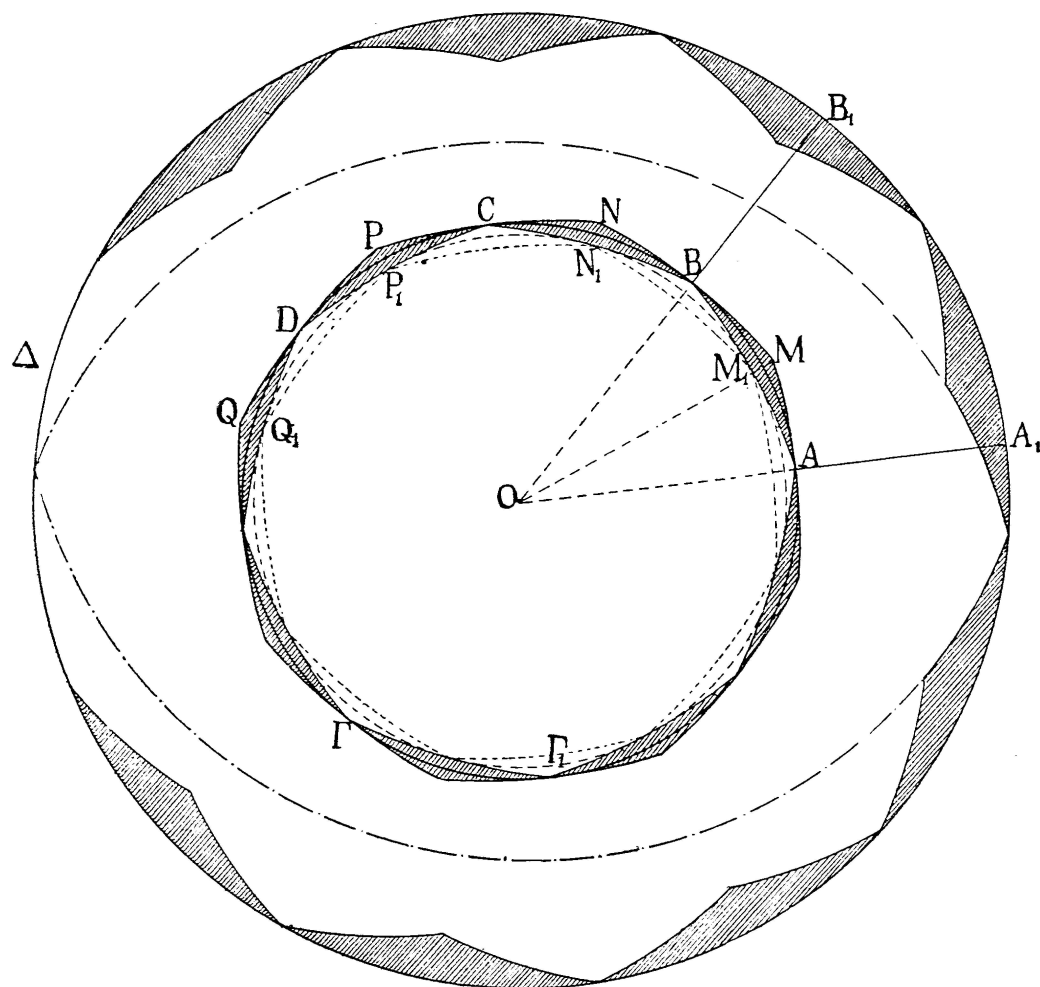


Fig. 1.

Il s'ensuit que les aires des polygones réguliers inscrits dans le cercle croissant avec le nombre des côtés, et les aires des polygones circonscrits décroissant en même temps, tendent vers une limite commune : nous l'appellerons *l'aire de la calotte limitée par le cercle*. La différence entre la circonférence de grand cercle et cette limite sera *l'aire de la zone comprise entre le cercle donné et le grand-cercle de même pôle*. Elle est la limite commune à la somme des aires

des quadrilatères tels que ABB_1A_1 et à la somme des aires des pentagones tels que $AMBB_1A_1$.

5. Formons la figure polaire de celle du numéro précédent. Nous obtenons un cercle de centre O , ayant pour rayon le complément du rayon du cercle donné, et un système de polygones réguliers inscrits et circonscrits à celui-ci. Le périmètre de chacun de ces polygones est la différence entre une circonférence de grand-cercle et l'aire du polygone polaire. Les conclusions du numéro précédent montrent alors que *les périmètres des polygones réguliers inscrits et circonscrits à un cercle tendent vers une limite commune lorsque le nombre de leurs côtés croît indéfiniment*. Il est naturel d'appeler cette limite la *longueur de la circonférence* du cercle considéré : elle est égale à la différence entre la circonférence de grand-cercle et l'aire de la calotte limitée par le cercle polaire ; donc (d'après le n° 4) *la longueur d'une circonférence est égale à l'aire de la zone comprise entre le cercle polaire et le grand-cercle ayant même centre*¹.

II. Trigonométrie sphérique et goniométrie.

6. Si ρ est un arc de grand-cercle on appelle $\sin \rho$ la longueur de la circonférence² de rayon ρ .

Le sinus d'un arc est une fonction croissante et continue de cet arc. Rappelons en effet (n° 5) que $\sin \rho$ représente aussi l'aire d'une zone qui a pour base un grand-cercle et pour hauteur ρ ; on déduit immédiatement qu'il est une fonction croissante de ρ . Soit Γ la base mineure de la zone ; considérons le polygone régulier $ABC\dots$ inscrit dans Γ (fig. 1), le cercle Γ_1 inscrit dans ce polygone et le polygone $M_1N_1\dots$ inscrit dans Γ_1 , dont les sommets sont les points de contact de Γ_1

¹ A comparer avec le théorème connu, de la proportionnalité entre les zones et leur hauteur.

² On doit remarquer qu'il n'a été dit nulle part quel était le rayon de la sphère ; on a dit seulement qu'on opérerait sur une sphère fixe. Quand on reste dans l'hypothèse euclidienne, que l'on prenne la longueur de ce rayon égale à $\frac{1}{2\pi}$, et l'on aura l'accord complet entre notre définition du sinus et l'ordinaire.