

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 7 (1905)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Buchbesprechung:** R. Marcolongo. — Teoria matematica dell' equilibrio dei corpi elastici. nos 348-349 des Manuali Hoepli. — 1 vol. in 16°, prix L. 3.— ; Hoepli, Milan, 1904.

**Autor:** Alasia, Cr.

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

à celles des nombres. Sommes et produits de segments. Sommes d'arcs et d'angles.

Chapitre IX. — Proportions et similitudes. Deux triangles sont dits semblables quand leurs angles sont respectivement congruents. Il eût fallu dire là un mot de l'existence de tels triangles ; c'est une lacune bien facile à combler. La similitude conduit naturellement au théorème de Thalès et aux proportionnalités qui en découlent.

Chapitre X. — Equivalence dans le plan. La mesure des aires planes peut être obtenue sans le secours de l'axiome d'Archimède parce que deux polygones équivalents peuvent être considérés comme sommes algébriques de triangles élémentaires en même nombre et deux à deux congruents, quoique de dispositions différentes. *Par définition* l'aire d'un triangle égale le demi produit de la base par la hauteur ; deux polygones équivalents ont même aire et réciproquement. Théorème de Pythagore et carrés construits sur les côtés d'un triangle. Le chapitre se termine par une note historique courte, mais intéressante sur le nombre  $\pi$ .

Chapitre XI. — Géométrie du plan, différant peu de notre cinquième livre usuel.

Le chapitre XII est consacré aux polyèdres et volumes. M. Halsted commence à bon droit par le théorème d'Euler ; il appelle *par définition* volume du tétraèdre le tiers du produit de la base par la hauteur, et prouve que le volume d'un tétraèdre égale la somme des volumes des tétraèdres en lesquels on le partage d'une façon quelconque. L'auteur examine quatre méthodes de division particulières, la division la plus générale peut être obtenue au moyen de ces dernières, et il en est de même pour un polyèdre.

Les chapitres XIII et XIV nous donnent l'étude de la sphère, du cylindre et du cône, avec la mesure de leurs surfaces et volumes. Pour le volume de la sphère, l'on fait usage de l'axiome de Cavalieri : *Si deux solides compris entre deux plans parallèles sont coupés par un plan quelconque parallèle aux deux premiers suivants des aires égales, ils ont même volume.*

Chapitre XV. Sphérique pure ou Géométrie à deux dimensions sur la sphère : Ce Chapitre ne pouvait manquer de trouver ici sa place. M. Halsted y précise d'abord ce que deviennent à la surface de la sphère les axiomes d'association, d'ordre et de congruence, il en déduit simplement et naturellement les propriétés élémentaires, trop négligées dans l'enseignement, des triangles sphériques.

Trois notes terminent l'ouvrage, et sont relatives ; l'une à un théorème de l'ordre, la deuxième au compas, et la troisième à la solution des problèmes.

Ainsi qu'on le voit par cette analyse, le livre de M. Halsted constitue une innovation et une tentative de vulgarisation des plus intéressantes. Pour lui donner plus de poids auprès des étudiants à qui il est destiné, l'éminent professeur de Kenyon College y a ajouté 700 exercices formant un choix excellent et varié. Nous souhaitons à cet ouvrage de notre distingué ami tout le succès qu'il mérite.

P. BARBARIN (Bordeaux).

R. MARCOLONGO. — **Teoria matematica dell' equilibrio dei corpi elastici.**  
nos 348-349 des *Manuali Hoepli*. — 1 vol. in 16°, prix L. 3.— ; Hoepli, Milan, 1904.

Ce n'est que depuis peu d'années que la théorie de l'équilibre des corps élastiques a commencé à se rendre pratiquement utile ; dans le passé, à

cause des méthodes mêmes qui la gouvernaient, elle était à peu près réduite à une spéculation théorique, à une succession de tentatives qui avaient pour but la recherche des valeurs de résistance de certains corps. Et cela devait certainement se prolonger jusqu'au moment dans lequel la mécanique analytique n'aurait trouvé une base rationnelle, quittant toute discussion oisive sur l'Ecole et le Cartésianisme, sur les théories atomistiques et celles péripatéticiennes. Beaucoup de savants se consacrèrent à l'étude des doctrines physiques de l'élasticité pour les acheminer sur une voie qui pouvait les amener au progrès : mais nous devons arriver jusqu'à Poisson pour apercevoir une tendance capable de donner des résultats utiles. La définition des pressions comme résultantes des actions moléculaires exercées sur une partie des points matériels qui composent un système par les autres points matériels du même système donnée par ce savant à propos de la tension des membranes élastiques (*Mémoire sur les surfaces élastiques*, 1814) fut celle qui contribua surtout aux progrès de la théorie. Cette définition, développement d'une pensée de Laplace, permit à Navier d'énoncer pour la première fois les conditions de l'équilibre élastique des corps (*Académie des Sciences de Paris*, 1821) et à Cauchy d'étendre aux corps non isotropes les résultats obtenus par Navier, bien que, au sujet des pressions, ce savant ne laisse de manifester sa tendance à retenir équivalentes les idées de Poisson avec celles plus anciennes de Lagrange. Jusqu'à nos jours cette conviction fut maintenue par beaucoup de savants : Saint-Venant ne cessa jamais de la défendre et M. Boussinesq, son disciple fidèle, ne considère en mécanique que les résultantes des actions moléculaires et non les forces de liaison (*Leçons synthétiques de Mécanique générale*, Paris, 1889). De nos jours cette théorie a fait des progrès très grands, s'acheminant rapidement au perfectionnement des méthodes qu'on applique à l'étude de la résistance des corps : elle forme pour ce motif un cours des plus utiles pour les ingénieurs.

Mais telle qu'on la trouve dans les recherches classiques de Saint-Venant sur la flexion et la torsion des prismes, de Boussinesq et de Hertz sur la dureté des corps, ou dans celles plus récentes de Cerruti, Levi-Civita, Somigliana, Morera, etc., elle ne peut pas former un cours ordonné et utile : le besoin d'un traité résumant en même temps les recherches classiques et les travaux modernes se faisait vivement sentir ; il était surtout désirable que ce traité se rende particulièrement utile aux ingénieurs dont les connaissances mathématiques ne sont pas très étendues. La tâche bien difficile fut entreprise par M. Marcolongo, le savant professeur de l'Université de Messine, et le résultat fut ce livre d'une valeur scientifique et didactique très remarquable.

Celui qui jette ses regards sur les titres des chapitres peut tout de suite voir que l'auteur a tenu peu de compte du développement historique du sujet, et j'estime qu'en raison même du but de ce manuel il a bien fait de préférer l'ordre logique à l'ordre historique.

Les corps élastiques traités dans ce volume sont ceux à trois dimensions : et comme l'auteur désire que le lecteur puisse recouvrer le plus grand profit de la lecture du livre, il a consacré trois chapitres, les trois premiers, à des théories mathématiques qui, quoique de la plus grande importance en physique, ne sont pas assez développées dans les cours universitaires : ce sont les théories des fonctions harmoniques et polyharmoniques. Les lemmes de Gauss et de Green sont développés seulement dans ce qui peut intéresser le reste du volume, c'est-à-dire seulement jusqu'à la détermination

de la fonction de Green dans des cas simples et à la solution de la question des valeurs sur le contour pour le cercle, pour la sphère, pour un demi-plan et pour un demi-espace indéfini. La transformation de l'équation  $\Delta_{2n} = 0$ , fait l'objet d'une étude très approfondie. Puis l'auteur passe rapidement en revue quelques-uns des principaux résultats obtenus par des géomètres et physiciens modernes, signalant particulièrement la question proposée et résolue par M. Painlevé<sup>1</sup> (déterminer trois fonctions  $x_1, y_1, z_1$ , de  $x, y, z$  et une fonction  $F$  de  $u, x, y, z$ , avec la condition que substituant  $x_1$ , etc. aux  $x, y$ , etc. dans  $u$ , qui vérifie  $\Delta_2 = 0$ , la fonction  $F$  vérifie aussi l'équation  $\Delta_2 = 0$  qui a conduit lord Kelvin à la propriété  $F = \frac{u_1}{r_1}$ ,  $r_1$

étant la distance d'un point de l'origine, et à la généralisation suggérée par M. Volterra d'un intéressant théorème de M. Levi-Civita, si  $u$  est une fonction des  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$  harmonique du degré  $m$ , et si l'on fait une inversion définie par les équations  $x'_i = x_i : r^2$ , la fonction  $u' = u : r^{2m-n}$  sera elle-même harmonique du degré  $m$  par rapport aux  $x'$  (*Atti R. Ist. Veneto*, 1897-98).

Le deuxième chapitre est consacré à la théorie de la *fonction potentielle* de Green<sup>2</sup>, et que Gauss<sup>3</sup> appelle tout simplement *potentiel*. Cette théorie, d'importance capitale dans toute la physique mathématique et qui doit son origine à Laplace, comme Legendre l'affirme dans le t. X des *Mémoires des savants étrangers*, est singulièrement négligée par le plus grand nombre des traités d'Analyse et dans les cours universitaires. Il en résulte que beaucoup d'ingénieurs ne connaissent rien d'une telle fonction, pas plus que des fonctions harmoniques, ce qui les empêche de tirer parti des théories modernes de la Physique. Des formules fondamentales, l'auteur passe rapidement et directement aux relations les plus remarquables, parmi lesquelles je veux rappeler celle donnée par M. Morera qui conduit directement à la célèbre formule de Poisson,

$$\Delta_2 V_1 = \Delta_2 V_0 = -\frac{1}{4} \pi k_0,$$

et au théorème classique de Dirichlet. Cela permet à l'auteur d'amener le lecteur par une voie plus simple que celle qui est suivie ordinairement, à l'étude de la fonction potentielle d'un ellipsoïde homogène par rapport à un point intérieur ou extérieur, obtenu par E. Beltrami (*Mémoires de l'Académie de Bologne*, I. 1880) et qui a donné lieu à de remarquables mémoires de MM. Pizetti et Morera (*Rend. Ac. d. Lincei*, 1894). La fonction potentielle d'une couche simple et d'une couche double donne aussi lieu à l'auteur de signaler les belles recherches de Poincaré et Liapounoff et des Italiens Lauricella et Morera.

Mais de même que l'auteur a justement estimé nécessaire de parler avant tout de la fonction potentielle, il était logique qu'il dût de même s'arrêter sur un autre point, également indispensable au développement de la théorie des corps élastiques, et c'est pour cela qu'il a voulu consacrer le troisième

<sup>1</sup> *Travaux et Mémoires de la Faculté des Sciences de Lille*, I. 1889.

<sup>2</sup> *An Essay on the application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism*. — Nottingham, 1820. — Réimprimé dans le Journal de Crelle, t. XLIV et XLVII.

<sup>3</sup> *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte*. Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre, 1879.



chapitre à la mécanique des corps continus. Ce chapitre, avec le deuxième, sont les plus remarquables du livre pour le soin tout particulier avec lequel l'auteur expose dans l'ensemble et dans les détails les plus remarquables, des théories qui ordinairement demandent bien plus de connaissances mathématiques.

En parcourant ces trois premiers chapitres, le lecteur constatera combien l'auteur a su présenter d'une manière à la fois claire et simple des questions qui ne se prêtent guère à une exposition élémentaire. Ces trois chapitres suffiraient pour assurer le succès scientifique du traité.

Mais nous voici enfin au sujet du livre, à la théorie mathématique de l'équilibre élastique des corps isotropes (*ch.* IV) et anisotropes (*ch.* V) dont le principe fondamental, « *ut tensio sic vis* », complètement expérimental, fut donné par Hooke en 1660 et que Wertheim, Morin, Edlung, etc., assujettirent à de nombreuses expériences. J. O. Thomson, qui dans ces derniers temps s'en occupa aussi, suggéra d'introduire des termes du troisième degré dans les composantes de déformation. M. Marcolongo déduit les équations de l'équilibre des corps isotropes suivant les mémoires classiques de Navier, Lamé, Poisson, Cauchy, c'est-à-dire en fonction des deux constantes  $\lambda$  et  $\mu$  (*constantes de Lamé*). Tout récemment M. le professeur Cerruti a substitué deux nouvelles constantes  $\Omega$  et  $\omega$  définies par les relations

$$\Omega^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\gamma}, \quad \omega^2 = \frac{\mu}{\gamma},$$

qui ont un sens physique très important. — Quant aux corps anisotropes, la détermination des équations de leur équilibre peut se faire par un procédé dû à Cauchy et qui est une extension de celui de Navier, ne présupposant ni l'analyse des pressions, ni celle des déformations; mais l'auteur préfère une méthode plus en relation avec l'expérience et commune à plusieurs théories physiques. D'après cette méthode les lois de l'élasticité sont déduites suivant un procédé indiqué par Green, c'est-à-dire de l'idée de potentiel d'élasticité et des principes de la thermodynamique. Ce chapitre contient un résumé de la théorie moléculaire du professeur Voigt qui suppose la matière formée d'un ensemble de corps très petits, c'est-à-dire discontinue. M. Marcolongo place à la fin du chapitre le théorème de réciprocité de M. Betti (*Théorie de l'élasticité*, chap. IV) dans la forme que lui a donnée M. Levy : « si un corps élastique est assujetti à deux systèmes de forces, le travail accompli par les forces du premier, lorsque les déplacements sont ceux qui appartiennent au deuxième, est égal au travail accompli par les forces du deuxième lorsque les déplacements sont ceux qui appartiennent au premier ». Ce théorème est l'un des plus importants dans la théorie de l'élasticité pour ses nombreuses applications et amène à une méthode remarquable pour intégrer les équations de l'équilibre des corps isotropes et qui prend le nom de ce savant.

Dans ses lignes générales est aussi considéré le problème de l'équilibre élastique quand les déplacements ou les pressions superficielles sont données : pour l'étude complète de la question, dans ce cas et dans beaucoup d'autres on peut voir la thèse de doctorat de M. le professeur Lauricella. M. Cerruti a aussi obtenu un théorème, mentionné à la page 236, et qui apporte de notables simplifications dans plusieurs cas particuliers. Ce théorème, tout à fait nouveau, qui fait dépendre tout problème d'équilibre, de la détermi-

nation de trois fonctions harmoniques, peut s'énoncer en disant que « les composantes de déplacement d'un corps élastique isotrope peuvent toujours s'exprimer à l'aide de trois fonctions harmoniques seulement ». — Le lecteur trouvera encore dans ce même chapitre un résumé très bien fait de certaines recherches modernes sur les équations de l'élasticité, dues à MM. Lauricella, E. et F. Goursat, J. Fredholm, Somigliana, Gebbia et à M. Marcolongo lui-même.

Nous voilà maintenant au problème très intéressant de Boussinesq et Cerruti (page 245) : déterminer la déformation d'un solide isotrope indéfini lorsqu'on donne sur le plan limite, 1° les déplacements ; 2° les forces ; 3° les déplacements normaux et les forces tangentielles, ou réciproquement. — Ce problème avait été résolu par MM. Lamé et Clapeyron au moyen des séries ; dans ces dernières années MM. Boussinesq et Cerruti ont présenté des nouvelles solutions par des formules plus simples et plus élégantes. L'auteur de ce traité indique encore deux autres méthodes de solution, dont l'une est de M. Somigliana qui en fit l'application à des questions nouvelles. Toutefois celles-ci pouvaient aussi se résoudre par des intégrations, comme l'a montré M. Marcolongo (*Rend. Ac. Lincei*, 1902).

Au chapitre VIII est traitée une autre question qui depuis Lamé a attiré l'attention des physiciens ; celle de la déformation d'une sphère isotrope. La première solution avait conduit Lamé à mettre en vue plusieurs propriétés des séries doubles qui trouvèrent ensuite de remarquables applications dans certains problèmes d'astronomie. Lord Kelvin, et peu après M. Chree ont considéré la question plus générale de la sphère assujettie à l'action de forces dérivables d'un potentiel qui satisfait à l'équation de Laplace, exprimant les composantes orthogonales du déplacement par des séries simples. La solution par des intégrales définies fut donnée pour la première fois en 1873 par M. Borchardt et après par MM. Somigliana et Cerruti, qui indiquèrent des méthodes particulières d'importantes applications. M. Marcolongo a lui aussi, indiqué d'élégantes solutions des problèmes composés, lorsque, sur la surface limite on donne une partie des déplacements et une des forces, ou les déplacements et les forces normales, et réciproquement. La méthode de résolution, simple et directe, que l'auteur expose dans ce traité, est celle que M. Almansi a indiqué dans son mémoire « *Sur la déformation de la sphère élastique* » (*Mém. Ac. de Turin*, XLVII, 1897) ; mais il signale aussi en peu de mots la solution donnée par M. Lauricella et celle plus récente donnée par M. Tedone. — Les nombreuses indications bibliographiques données dans ce chapitre comme aussi dans les autres, sont un guide très utile à ceux qui désirent recourir aux sources des théories ou approfondir davantage les questions traitées.

Un autre problème d'élasticité d'une grande importance par ses applications pratiques, mais qui présente de remarquables difficultés, est celui de la déformation d'une pièce cylindrique. Le cas général avec l'hypothèse que le cylindre est sollicité par des forces distribuées arbitrairement sur les deux bases, n'a pas encore été résolu. L'attention des savants s'est limitée à la considération de certains cas particuliers, dont l'un porte le nom de *problème de Saint-Venant*. La solution indiquée par M. Marcolongo dans son traité est modelée sur celle donnée par Clebsch (*Theorie der Elasticität fester Körper*, 1862), mais simplifiée et adaptée à ceux qui ont en vue les applications pratiques. La question de la déformation des plaques cylindriques, que l'auteur appelle *le problème complémentaire de celui de Saint-*

*Venant* et qui avait été proposé et résolu par Clebsch, forme l'objet du dixième chapitre. Enfin le dernier chapitre est entièrement consacré aux problèmes de M. le professeur Voigt. Ces problèmes sont une généralisation de celui de Saint-Venant ; ils permettent d'assigner des méthodes générales à la détermination des constantes élastiques des cristaux et ont des applications très importantes dans l'étude des phénomènes prézoélectriques d'un cylindre cristallin.

Dans ce compte rendu, je me suis efforcé à mettre en évidence l'importance des questions abordées par M. Marcolongo et l'excellente coordination didactique avec laquelle elles ont été étudiées. Je suis certain que son ouvrage sera accueilli avec beaucoup de faveur par les mathématiciens et les ingénieurs.

CR. ALASIA (Tempio, Sard.)

J. TROPFKE. — **Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung.** Erster Band, 8<sup>o</sup>, VIII-332 p., 1902 ; Mk. 8.—. Zweiter Band, VIII-496 p., 1903 ; Mk. 12.— ; Veit & Co., Leipzig.

Le Tome Premier de cet Ouvrage comprend deux parties : le *Calcul* et l'*Algèbre* ; le Tome II en comprend douze : *Géométrie*, *Logarithmes*, *Trigonométrie plane*, *Sphérique et Trigonométrie sphérique*, *Séries*, *Intérêts composés*, *Analyse combinatoire et calcul des probabilités*, *Fractions continues*, *Stéréométrie*, *Géométrie analytique*, *Sections coniques*, *Maxima et Minima*. Sur ces quatorze parties les six premières embrassent 612 pages, tandis que les huit dernières n'occupent que 160 pages. Comme on le voit, ces différentes parties n'ont pas été traitées de la même manière, tout au moins au point de vue quantitatif. Nous reconnaissons qu'il est juste que la plus grande place soit accordée au *Calcul*, à l'*Algèbre* (étude des équations), à la *Planimétrie* (c'est ainsi que devrait être intitulée la 3<sup>me</sup> partie, et non pas « Géométrie ») et à la *Trigonométrie*, mais nous n'en estimons pas moins que la plupart des autres parties sont trop restreintes par rapport aux premières. Quant à l'ordre adopté par l'auteur, il soulèvera également des critiques de la part de bien des lecteurs. On comprend que les *Logarithmes* précèdent la *Trigonométrie* ; mais on ne s'explique pas pourquoi les *Séries*, les *Intérêts composés*, l'*Analyse combinatoire* et les *Fractions* ont été intercalés entre la *Trigonométrie sphérique* et la *Stéréométrie*.

Quant à la façon dont sont traitées ces différentes parties, notamment les six premières, nous ne pouvons exprimer que des éloges ; pour tous ceux qui voudront glisser quelques notes historiques, çà et là, dans leur enseignement, cet Ouvrage constitue une mine très précieuse ; ils s'orienteront très facilement dans les différents chapitres. L'auteur a d'ailleurs eu soin d'ajouter une table alphabétique et une analytique ; toutefois celle-ci pourrait être encore plus riche ; on y omet, entre autres, l'indication des démonstrations à induction complète.

Le mode d'exposition adopté par l'auteur devait inévitablement donner lieu à des répétitions ; mais, il eût été possible d'en diminuer le nombre et, par ce fait, l'étendue du volume. Ainsi, on retrouve dans la section C (le développement de la notion de nombre) de la deuxième Partie les chapitres « le nombre un », « le nombre zéro », « le nombre fractionnaire », qui figurent déjà dans la première Partie, section A (les noms de nombres, les chiffres) et dans la section D (les fractions). Il eût donc suffi de faire entrer les nombres négatifs, irrationnels et complexes dans la section C de la deuxième