

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	7 (1905)
Heft:	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 Artikel:	 SUR LE NOMBRE DES TANGENTES QU'ON PEUT MENER A UNE COURBE PAR UN POINT SITUÉ SUR LA COURBE
Autor:	Teixeira, F. Gomes
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-8427

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

la série de 30 rouges ou 30 noires consécutives n'est pas encore sortie. De fait la probabilité de l'événement est $\frac{1}{1\ 073\ 741\ 824}$ et il y a peu de chances qu'il se produise avant qu'on ait joué un nombre de coups comparable au chiffre 1 073 741 824, disons égal au quotient 1 073 741 824 : 40.

R. DE MONTESSUS

Maître de Conférences à la Faculté Libre
des Sciences de Lille.

SUR LE NOMBRE DES TANGENTES

QU'ON PEUT MENER A UNE COURBE PAR UN POINT
SITUÉ SUR LA COURBE

1. — Le problème qui a pour but la détermination du nombre des tangentes qu'on peut mener à une courbe algébrique par un point situé sur la courbe se résout d'une manière presque intuitive quand on considère seulement les tangentes réelles, comme on peut voir dans l'ouvrage de Basset, *An elementary Treatise on cubic and quartic curves* (Cambridge, 1901, p. 17). Mais, quand on veut étudier cette question d'une manière générale, en considérant les tangentes réelles et imaginaires, sa résolution est moins facile. C'est à ce point de vue général que s'est placé Salmon dans son ouvrage sur les *courbes planes* (édit. française, Paris, 1884, p. 89), où il a donné à cet égard un théorème important, qu'il a obtenu par une élégante méthode algébrique.

Or, nous allons nous occuper de cette question, en nous plaçant aussi au point de vue algébrique général, pour donner une démonstration, que nous croyons nouvelle, condui-

sant par une méthode plus élémentaire au résultat obtenu par l'éminent géomètre anglais.

2. — Soit :

$$f(x, y) = 0$$

l'équation de la courbe considérée et m son degré.

L'équation de sa première polaire, par rapport au point (x_1, y_1) , est, comme on le sait, la suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x} (x - x_1) + \frac{\partial f}{\partial y} (y - y_1) = 0,$$

et son degré est égal à $m - 1$.

Cela posé, nous allons démontrer le lemme suivant :

Si (x_1, y_1) est un point multiple d'ordre k de la courbe considérée, il est aussi un point multiple de même ordre de sa polaire, et les k branches de la courbe qui se coupent en ce point sont tangentes aux k branches de la polaire qui s'y coupent aussi.

On peut considérer comme compris dans cet énoncé le cas où (x_1, y_1) est un point simple de la courbe, en supposant alors $k = 1$.

Pour démontrer le lemme précédent, écrivons l'équation de la courbe de la manière suivante :

$$f(x_1 + x - x_1, y_1 + y - y_1) = 0.$$

et ensuite développons son premier membre suivant les puissances de $x - x_1$ et $y - y_1$; ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} (x - x_1) + \frac{\partial f}{\partial y_1} (y - y_1) + \frac{1}{2} & \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} (x - x_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1} (x - x_1)(y - y_1) \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} (y - y_1)^2 \right] + \dots = 0. \end{aligned}$$

ou symboliquement

$$\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} (x - x_1) + \frac{\partial f}{\partial y_1} (y - y_1) \right]^{(n)} = 0.$$

L'équation de la polaire de cette courbe peut être écrite de la

manière suivante, en ordonnant aussi son premier membre suivant les puissances de $x - x_1$ et $y - y_1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} (x - x_1) + \frac{\partial f}{\partial y_1} (y - y_1) + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} (x - x_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1} (x - x_1)(y - y_1) \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} (y - y_1)^2 \right] + \dots = 0, \end{aligned}$$

ou symboliquement

$$\sum_{n=1}^{n=m} \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} (x - x_1) + \frac{\partial f}{\partial y_1} (y - y_1) \right]^{(n)} = 0.$$

Ces équations montrent, en premier lieu, que si (x_1, y_1) est un point simple de la courbe considérée, la droite dont l'équation est

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} (x - x_1) + \frac{\partial f}{\partial y_1} (y - y_1) = 0$$

est tangente à cette courbe et à sa polaire.

On voit ensuite que, si (x_1, y_1) est un point double de la courbe considérée et si, par conséquent, ses coordonnées x_1 et y_1 satisfont aux équations $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, les deux droites représentées par les équations

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} (x - x_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1} (x - x_1)(y - y_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} (y - y_1)^2 = 0$$

sont tangentes au point (x_1, y_1) à la courbe et à sa polaire.

En continuant de la même manière on démontre le lemme énoncé précédemment.

3. — En nous basant sur le lemme ci-dessus, nous allons déterminer le nombre des tangentes qu'on peut mener à une courbe donnée par le point (x_1, y_1) .

Supposons d'abord que la courbe a seulement un point multiple, qui coïncide avec (x_1, y_1) , et que l'ordre de ce point est égal à k .

La courbe donnée et sa polaire se coupent alors en m ($m - 1$) points et l'un de ces points coïncide avec (x_1, y_1) .

Or, ce point étant multiple d'ordre k sur la courbe et sur la polaire, il compte pour k^2 intersections. Mais, comme les k branches de la courbe sont tangentes aux k branches de la polaire, chaque branche de celle-là a encore un autre point, consécutif à (x_1, y_1) , en commun avec la polaire. Donc le nombre des intersections de la courbe et de sa polaire, distinctes de (x_1, y_1) , est égal à

$$m(m - 1) - k(k + 1).$$

Or, ces points coïncident avec les points de contact des tangentes à la courbe menées par (x_1, y_1) ; et on a, par conséquent, en représentant le nombre de ces tangentes par t ,

$$t = m(m - 1) - k(k + 1),$$

résultat qui coïncide avec celui qui a été obtenu par Salmon.

Si (x_1, y_1) est un point simple, cette formule a encore lieu, en supposant alors $k = 1$.

Si la courbe donnée a δ points doubles et ν points de rebroussement, distincts de (x_1, y_1) , la valeur de t peut être encore obtenue facilement, en employant la méthode dont on fait usage habituellement pour démontrer celle des formules de Plücker qui détermine la classe de la courbe (SALMON, *l. c.*, p. 77-78) et le lemme précédemment démontré. On trouve ainsi.

$$t = m(m - 1) - 2\delta - 3\nu - k(k + 1).$$

F. Gomes TEIXEIRA (Porto).