Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 7 (1905)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES DÉMONSTRATIONS DE DEUX FORMULES POUR LE CALCUL DES NOMBRES DE BERNOULLI

Autor: Teixeira, F. Gomes

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-8450

$$\arcsin x\ ,\ \cos x\ ,\ \log\frac{1+x}{1-x}\ ,\ \log(x+\sqrt{1+x^2})\ .\ e^x \pm e^{-x}\ ,$$

$$(x+\sqrt{1+x^2})^m \pm (x+\sqrt{1+x^2})^{-m} \text{ etc...}$$

W. Ermakoff (Kief).

(Traduction de M. D. Mirimanoff, Genève).

Note de la Rédaction. — Nous apprenons que M. Tchaplyguine, professeur à l'Université de Moscou, ayant remarqué que les fonctions considérées dans l'article précédent sont des intégrales d'équations différentielles linéaires du 1^{er} et du 2^{me} ordre, essaya de généraliser les procédés dont s'est servi l'auteur de ce travail. A la suite d'une correspondance qui s'engagea alors entre M. Tchaplyguine et M. Ermakoff, il fut reconnu qu'il était possible de donner un procédé général permettant de calculer approximativement les intégrales d'équations différentielles quelconques. Ces intégrales peuvent être exprimées au moyen de formules simples qui dans l'intervalle donné représentent ces intégrales avec une approximation donnée. Les recherches de M. Tchaplyguine paraîtront prochainement dans un périodique mathématique.

SUR LES DÉMONSTRATIONS DE DEUX FORMULES POUR LE CALCUL DES NOMBRES DE BERNOULLI

I. — Nous allons nous occuper, en premier lieu, de la formule bien connue

$$B_{2n-1} = (-1)^n \frac{2n}{2^{2n}-1} \sum_{i=1}^{2n-1} (-1)^i \frac{1}{2^{i+1}} \left[i^{2n-1} - i(i-1)^{2n-1} + \binom{i}{2}(i-2)^{2n-1} \right.$$
$$\left. - \binom{i}{3}(i-3)^{2n-1} + \dots \pm \binom{i}{i-1} 1^{2n-1} \right],$$

où B_{2n-1} représente les *nombres de Bernoulli.*

On trouve une démonstration de cette formule dans le *Calcul intégral de Serret* (2^e édit., p. 225) et nous en avons donné une autre dans notre *Curso de Analyse* (Calculo differencial, 3^e édit., p. 237). Mais nous allons l'obtenir ici par une analyse plus simple que celle que l'on trouve dans ces deux traités, au moyen de la formule connue (HERMITE, Cours d'Analyse de l'Ecole polytechnique, p. 60) :

$$y^{(n)} = n\,! \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{i\,!} f^{(i)}(u) ,$$

où

$$A_i = \frac{1}{n\,!}\left[(u^i)^{(n)} - i\,(u^{i-1})^{(n)}\, u + \binom{i}{2} (u^{i-2})^{(n)} u^2 \ldots \right] ,$$

laquelle donne la dérivée d'ordre n de y par rapport à x, quand $y = f(u)$ et u est une fonction donnée de x.

Pour cela, appliquons cette formule à la fonction

$$y = (1 + e^x)^{-1} .$$

On a, en posant $y = u^{-1}$, $u = 1 + e^x$,

$$y^{(n)} = n\,! \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{A_i}{(1 + e^x)^{i+1}} ,$$

où

$$A_i = \frac{1}{n\,!} \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k \binom{i}{k} \frac{d^n (1 + e^x)^{i-k}}{dx^n} (1 + e^x)^k .$$

Mais

$$(1 + e^x)^{i-k} = 1 + (i-k)\, e^x + \binom{i-k}{2} e^{2x} + \ldots + e^{(i-k)x} ,$$

et, par conséquent,

$$\frac{d^n (1 + e^x)^{i-k}}{dx^n} = (i-k)\, e^x + \binom{i-k}{2} 2^n e^{2x} + \binom{i-k}{3} 3^n e^{3x} + \ldots$$
$$+ (i-k)^n e^{(i-k)x} ,$$

et, en posant $x = 0$,

$$\left[\frac{d^n(1+e^x)^{i-k}}{dx^n}\right]_{x=0} = (i-k) + \binom{i-k}{2}2^n + \binom{i-k}{3}3^n + \ldots + (i-k)^n$$

Donc on a

$$y_0^{(n)} = n!\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \frac{A_i}{2^{i+1}} ,$$

où

$$A_i = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{i-1}(-1)^k\binom{i}{k}2^k\sum_{t=0}^{i-k}\binom{i-k}{t}t^n$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{t=0}^{i-1}t^n\sum_{k=0}^{i-t}(-1)^k\binom{i}{k}\binom{i-k}{t}2^k .$$

Mais, puisque

$$\binom{i}{k}\binom{i-k}{t} = \binom{i}{t}\binom{i-t}{k} ,$$

nous pouvons écrire l'identité

$$\sum_{k=0}^{i-t}(-1)^k\binom{i}{k}\binom{i-k}{t}2^k = \sum_{k=0}^{i-t}(-1)^k\binom{i}{t}\binom{i-t}{k}2^k$$

$$= \binom{i}{t}\sum_{k=0}^{i-t}(-1)^k\binom{i-t}{k}2^k = \binom{i}{t}(1-2)^{i-t} = (-1)^{i-t}\binom{i}{t} .$$

Nous avons donc

$$A_i = \frac{1}{n!}\sum_{t=1}^{i-1}(-1)^{i-t}\binom{i}{t}t^n ,$$

et

$$y_0^{(n)} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\frac{1}{2^i+1}\left[i^n - i(i-1)^n + \binom{i}{2}(1-2)^n - \ldots \pm \binom{i}{i-1}1^n\right] .$$

En employant maintenant la formule

$$B_{2n-1} = (-1)^n\frac{2n}{2^{2n}-1}y_0^{(2n-1)} ,$$

qui lie les nombres de Bernoulli aux dérivées de la fonction considérée, on obtient la formule qu'on a écrite précédemment.

II. — La deuxième formule pour le calcul des nombres de Bernoulli que nous allons considérer, fut attribuée à LIBRI par CAUCHY (*Œuvres*, 2e série, t. VII, p. 348). On peut l'obtenir immédiatement au moyen de la formule

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum \frac{n!\, f^{(i)}(u)\, u'^{\alpha}\, u''^{\beta} \ldots (u^{(n)})^{\lambda}}{\alpha!\, \beta! \ldots \lambda!\, (2!)^{\beta} (3!)^{\gamma} \ldots (n!)^{\lambda}},$$

où Σ représente une somme qui se rapporte aux solutions entières, positives et nulles, de l'équation

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + n\lambda = n$$

et où

$$i = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda,$$

laquelle donne la dérivée d'ordre n de y par rapport à x, quand $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$.

En appliquant, en effet, cette formule à la fonction

$$y = \log \frac{\pi x}{\sin \pi x} = -\log\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{3!} + \frac{\pi^4 x^4}{5!} - \ldots\right),$$

on trouve, en posant $n = 2m$, et

$$y = -\log u, \qquad u = 1 - \frac{\pi^2 x^2}{3!} + \frac{\pi^4 x^4}{5!} - \ldots,$$

l'égalité suivante :

$$\left(\frac{d^{2m} y}{dx^{2m}}\right)_{x=0} = \pi^{2m} \sum (-1)^i \frac{(i-1)!\,(2m)!}{\beta!\,\delta! \ldots} \left(-\frac{1}{3!}\right)^{\beta} \left(\frac{1}{5!}\right)^{\delta},$$

où Σ représente une somme qui doit s'étendre aux solutions entières, positives et nulles, de l'équation

$$\beta + 2\delta + \ldots = m,$$

et où

$$i = \beta + \delta + \ldots$$

Mais, d'un autre côté, on a

$$\log \frac{\pi x}{\sin \pi x} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{2m-1}\pi^{2m}}{m(2m)!} \mathrm{B}_{2m-1} x^{2m} .$$

On trouve donc

$$\mathrm{B}_{2m-1} = \frac{m(2m)!}{2^{2m-1}} \sum (-1)^i \frac{(i-1)!}{\beta!\,\delta!\,\omega!\,\ldots} \left(-\frac{1}{3!}\right)^{\beta} \left(\frac{1}{5!}\right)^{\delta} \left(-\frac{1}{7!}\right)^{\omega} \ldots$$

Cette formule est celle que nous nous proposions d'obtenir.

F. Gomes Teixeira (Porto).

LES AXIOMES DE LA GÉOMÉTRIE

Les études que nous avons successivement publiées dans cette Revue[1] sur les Principes de la Géométrie appellent rationnellement, à titre de conclusion, une vue d'ensemble sur la Géométrie tout entière.

Etablir les axiomes de la Géométrie, c'est réduire cette science à être une *application* d'une théorie plus générale et indépendante de tout élément géométrique.

La théorie plus générale dont la Géométrie est une simple application n'est autre que celle des *ensembles*.

Cette théorie, dont la terminologie a été abondamment utilisée, dans ces dernières années, dans de nombreux travaux sur l'Analyse numérique, a reçu peu de développement en ce qui concerne ses parties les plus générales, bien que tous les éléments essentiels de la théorie intégrale des ensembles semblent réunis dans l'œuvre géniale de G. Cantor.

[1] *L'Ens. Math.*, 7e année, p. 270-291 ; p. 375-381.