Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 7 (1905)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: RESTES DE QUELQUES SÉRIES USUELLES
Autor: Ermakoff, W.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-8449

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

RESTES DE QUELQUES SÉRIES USUELLES

1. Pour certains esprits superficiels la Mathématique se réduit à un ensemble de règles fixes et de formules. Cette opinion, évidemment fausse, s'explique par la manière défectueuse dont la Mathématique est enseignée dans beaucoup d'écoles secondaires et même dans quelques écoles supérieures. Dans les établissements secondaires cet enseignement se réduit souvent à l'assimilation d'un certain nombre de règles déterminées et de formules. Mais ces règles ne sont vraiment indispensables qu'à ceux qui raisonnent mal. Les esprits qui savent raisonner sont obligés souvent, pour arriver au but de la manière la plus simple et la plus directe, à aller contre les prescriptions des règles enseignées. Il serait impossible en effet de donner des règles fixes applicables à tous les cas, on ne saurait donner que des règles fondamentales. Mais ces règles fondamentales sont éminemment flexibles et peuvent subir des transformations infinies. Un esprit qui possède bien les principes de la science essaie dans chaque cas particulier de trouver la voie la plus naturelle et la plus directe et de créer ainsi des règles spéciales.

Prenons d'abord un exemple très élémentaire. Soit l'équation du 2me degré

$$(1) \qquad (ax - b)^2 = m(c - dx)^2 .$$

En appliquant le procédé classique qu'on trouve exposé dans les traités d'Algèbre élémentaire, on obtient

$$x = \frac{ab - cdm}{a^2 - d^2m} \pm \sqrt{\left(\frac{ab - cdm}{a^2 - d^2m}\right)^2 - \frac{b^2 - c^2m}{a^2 - d^2m}} .$$

Cette expression est exacte, cela va sans dire, mais elle est trop compliquée et la voie qu'on a suivie est évidemment trop longue.

Pour arriver au but il suffit d'extraire la racine carrée des deux membres de l'équation (1), ce qui donne

$$ax - b = \pm (c - dx)\sqrt{m},$$

d'où

$$x = \frac{b \pm c\sqrt{m}}{a \pm d\sqrt{m}}.$$

Voici maintenant un exemple plus important.

Dans tous les cours de Calcul différentiel on donne des règles générales permettant de trouver l'expression du reste des séries de Taylor et de Maclaurin. Mais les expressions ainsi obtenues sont souvent très compliquées et peu propres à l'évaluation de l'erreur et à la recherche des conditions de la convergence.

Je me propose de montrer ici que les restes des séries les plus usuelles peuvent être obtenus sous une forme plus simple. Le procédé dont je me servirai est basé sur le théorème de Rolle : *deux racines d'une fonction comprennent toujours une racine de la dérivée.* On suppose que la fonction et sa dérivée sont continues dans l'intervalle considéré.

2. *Fonction exponentielle.*

Posons

$$(2) \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} + \frac{qx^n}{1.2\dots(n-1)}.$$

Il s'agit de déterminer q de telle manière que l'égalité (2) soit satisfaite pour la valeur donnée de x.

Nous regarderons x comme une constante. Soit au contraire z une quantité variable. Considérons la fonction suivante :

$$F(z) = e^{-z}\left\{1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \dots + \frac{z^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} + \frac{qz^n}{1.2\dots(n-1)}\right\} - 1.$$

$F(z)$ s'annulle pour $z = 0$, mais elle s'annulle aussi pour $z = x$, en vertu de (2). Donc $F'(z)$ admet une racine com-

prise entre 0 et x, qu'on peut représenter par ϑx, ϑ étant un nombre positif < 1. Or

$$F'(z) = \frac{e^{-z} z^{n-1} (qn - qz - 1)}{1.2.3 \ldots (n-1)} .$$

Comme $F'(z)$ s'annulle pour $z = \vartheta x$, on a

$$qn - q\vartheta x - 1 = 0$$

d'où

$$q = \frac{1}{n - \vartheta x}$$

et par conséquent

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2 \ldots (n-1)} + \frac{x^n}{1.2 \ldots (n-1)(n - \vartheta x)} .$$

3. *Formule du binôme.*

Un procédé semblable appliqué à la fonction $(1 + x)^m$ donne

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1) \ldots (m-n+2)}{1.2 \ldots (n-1)} x^{n-1}$$
$$+ \frac{m(m-1) \ldots (m-n+1) x^n}{1.2.3 \ldots (n-1)[n + (n-m)\vartheta x]}$$

4. $\log(1 + x)$.

Posons

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \pm \frac{x^{n-1}}{n-1} \mp \frac{qx^n}{n}$$

et considérons la fonction

$$F(z) = \log(1 + z) - z + \frac{z^2}{2} - \ldots \mp \frac{z^{n-1}}{n-1} \pm \frac{qz^n}{n} .$$

On a

$$F'(z) = \frac{\pm z^{n-1}(q + qz - 1)}{1 + z} .$$

Or $F(z)$ s'annulle pour $z = 0$, $z = x$; donc $F'(z)$ s'annulle pour $z = \vartheta x$, d'où

$$q + q\vartheta x - 1 = 0 .$$

Par conséquent

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \pm \frac{x^{n-1}}{n-1} \mp \frac{x^n}{n(1+\vartheta x)} .$$

5. arc tang x.

Un procédé analogue appliqué à la fonction arc tang x donne

$$\text{arc tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \pm \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \mp \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\vartheta x^2)} .$$

6. $\sin x$.

Posons

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots \pm \frac{x^{2n-1}}{1.2\ldots(2n-1)} \mp \frac{q x^{2n+1}}{1.2\ldots(2n-1)} .$$

Considérons la fonction suivante

$$F(z) = \frac{1}{\sin z}\left\{ z - \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots \pm \frac{z^{2n-1}}{1.2\ldots(2n-1} \mp \frac{q z^{2n+1}}{1.2\ldots(2n-1)} \right\} - 1 .$$

Cette fonction s'annulle pour $z = 0$, $z = x$. Par conséquent la dérivée $F'(z)$ admet une racine comprise entre 0 et x. Cette racine annulle aussi la fonction

$$\Phi(z) = \sin^2 z\, F'(z) .$$

Mais $\Phi(z)$ s'annulle aussi pour $z = 0$. Il en résulte que $\Phi'(z)$ admet une racine comprise entre 0 et x, qu'on peut représenter par $x\sqrt{\vartheta}$.

Or

$$\Phi'(z) = \pm \frac{z^{2n-1}\sin z}{1.2\ldots(2n-1)}\left\{ 2n(2n+1)q + q z^2 - 1 \right\} .$$

Donc

$$2n(2n+1)q + q\vartheta x^2 - 1 = 0$$

et par conséquent

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots \pm \frac{x^{2n-1}}{1.2\ldots(2n-1)} \mp \frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots(2n-1)\,[2n(2n+1)+\vartheta x^2]} .$$

7. *Fonction hypergéométrique.*

La fonction hypergéométrique vérifie, comme on sait, l'équation différentielle.

$$x(1-x)\varphi''(x) + \left\{ \gamma - (\alpha+\beta+1)x \right\} \varphi'(x) - \alpha\beta\varphi(x) = 0 .$$

On est conduit au développement suivant :

$$\varphi(x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma} x + \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)}{1.2\,\gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots$$
$$+ \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\alpha+n-2)(\beta+n-2)}{1.2\ldots(n-1)\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-2)} x^{n-1}$$
$$+ \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{1.2\ldots(n-1)\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-2)} qx^n .$$

Pour trouver la valeur de q, considérons la fonction

$$F(z) = \frac{1}{\varphi(z)} \left\{ 1 + \frac{\alpha\beta z}{1.\gamma} + \ldots + \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\alpha+n-2)(\beta+n-2)}{1.2\ldots(n-1)\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-2)} z^{n-1} \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{1.2\ldots(n-1)\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-2)} qz^n \right\} - 1 .$$

Cette fonction admet les racines $z = 0$, $z = x$.

Formons maintenant la fonction suivante :

$$\Phi(z) = z^{\gamma}(1-z)^{\alpha+\beta+1-\gamma}\varphi(z)^2 F'(z) .$$

Cette fonction admet une racine comprise entre 0 et x ; d'autre part elle s'annulle pour $z = 0$. Par conséquent la dérivée $\Phi'(z)$ admet une racine comprise entre 0 et x. Or

$$\Phi'(z) = \frac{\alpha\beta(\alpha+1)\beta+1)\ldots(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{1.2\ldots(n-1)\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-2)} z^{\gamma+n-2}(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma}\varphi(z)$$
$$\times \left\{ qn(\gamma+n-1) - q(\alpha+n)(\beta+n)z - 1 \right\} .$$

Comme $\Phi'(z)$ s'annulle pour $z = \vartheta x$, on a

$$q = \frac{1}{n(\gamma+n-1) - (\alpha+n)(\beta+n)\vartheta x} .$$

Nous indiquerons encore les fonctions suivantes qu'on pourrait traiter d'une manière analogue :

$$\arcsin x\ ,\ \cos x\ ,\ \log\frac{1+x}{1-x}\ ,\ \log(x+\sqrt{1+x^2})\ .\ e^x \pm e^{-x}\ ,$$

$$(x+\sqrt{1+x^2})^m \pm (x+\sqrt{1+x^2})^{-m} \text{ etc...}$$

W. Ermakoff (Kief).

(Traduction de M. D. Mirimanoff, Genève).

Note de la Rédaction. — Nous apprenons que M. Tchaplyguine, professeur à l'Université de Moscou, ayant remarqué que les fonctions considérées dans l'article précédent sont des intégrales d'équations différentielles linéaires du 1er et du 2me ordre, essaya de généraliser les procédés dont s'est servi l'auteur de ce travail. A la suite d'une correspondance qui s'engagea alors entre M. Tchaplyguine et M. Ermakoff, il fut reconnu qu'il était possible de donner un procédé général permettant de calculer approximativement les intégrales d'équations différentielles quelconques. Ces intégrales peuvent être exprimées au moyen de formules simples qui dans l'intervalle donné représentent ces intégrales avec une approximation donnée. Les recherches de M. Tchaplyguine paraîtront prochainement dans un périodique mathématique.

SUR LES DÉMONSTRATIONS DE DEUX FORMULES POUR LE CALCUL DES NOMBRES DE BERNOULLI

I. — Nous allons nous occuper, en premier lieu, de la formule bien connue

$$B_{2n-1} = (-1)^n \frac{2n}{2^{2n}-1} \sum_{i=1}^{2n-1} (-1)^i \frac{1}{2^{i+1}} \left[i^{2n-1} - i(i-1)^{2n-1} + \binom{i}{2}(i-2)^{2n-1} - \binom{i}{3}(i-3)^{2n-1} + \dots \pm \binom{i}{i-1} 1^{2n-1} \right],$$

où B_{2n-1} représente les *nombres de Bernoulli*.