Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 7 (1905)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Kapitel: propos d'un théorème sur le triangle.

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 27.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

tome VI, p. 176; tome VII, p. 344 et tome VIII, p. 55); cette année enfin, l'Université de Louvain a littéralement calqué l'enseignement donné à l'École militaire, dans ses « Notes du Cours de Géométrie descriptive de l'Université catholique de Louvain », notes publiées sans nom d'auteur (Louvain, 1904).

On peut donc affirmer qu'en Belgique, l'évolution prévue en 1893 Mathesis, 1893, p. 45 a été complète et rapide; nous pouvons ajouter qu'il en est résulté un progrès considérable, comme le prouvent annuellement, jusqu'à l'évidence, les examens d'entrée à l'École militaire.

Signalons encore qu'en Portugal, le Cours de Géométrie descriptive de l'École polytechnique, publié en 1899 par L. P. da Motta Pegado se borne à n'employer que la direction de la ligne de terre.

(Les Mathématiques en Portugal au XIX° siècle, par R. Guimaваеs, p. 77. Coïmbre, 1900.

F. Chomé Bruxelles.

Une nouvelle règle à calculs.

La règle à calculs circulaire Ch. Charpentier, qui a été signalée aux lecteurs de cette Revue par M. H. Laurent (Paris), vient d'être mise en vente, au prix de fr. 18.—, chez les principaux opticiens. On peut aussi l'obtenir directement en s'adressant à l'inventeur M. Ch. Charpentier, Ingénieur, à Valdoie-Belfort (France).

A propos d'un théorème sur le triangle.

Le théorème de M. Kariya publié dans notre numéro de mars 1904 (p. 430 à 132) et les intéressantes remarques qu'il a provoquées (p. 236-239, 406-411) nous en procurent encore de nouvelles que nous résumons ci-après.

VIII. — Lettre de M. Barbarin (Bordeaux):

Dans la note sur le théorème de M. Kariya, p. 238, le lecteur est prié de faire la rectification suivante :

ligne 16 : lire α_1' et α_2' au lieu de α_1 et α_2

ligne 17 : lire α_1 et α_2 au lieu de α_1' α_2'

ligne 24 : lire $\frac{p-c}{p-b}$ au lieu de $\frac{p-b}{p-c}$

IX. — Lettre de M. Cantoni (Viadano, Mantova, Italie).

a: La proposition suivante admet comme cas particulier celui qui a été indiqué par M. Kariya.

Si d'un point quelconque O du plan d'un triangle ABC, pourvu qu'il ne soit pas situé sur les côtés et ne coïncide pas avec l'orthocentre, nous abaissons sur les côtés les perpendiculaires OX, OY, OZ et nous prenons sur elles les points D, E, F tels que

$$OD : OE : OF = \frac{1}{OX} : \frac{1}{OY} : \frac{1}{OZ}$$

les trois droites AD, BE, CF concourent en un point de l'hyperbole équilatère passant par le point O et par les trois sommets du triangle.

Il suffit observer que si, par exemple, A' et C' sont les points où se coupent ZO et BC, XO et BA, les quatre points X, Z, A', C' sont concycliques.

A l'aide de cette considération on peut aisément décrire par points l'hyperbole équilatère qui passe par quatre points donnés.

b) Le théorème de M. Franke que j'ai généralisé (Enseig. Math. p. 410, 1904) peut se démontrer plus rapidement en appliquant la propriété que deux figures homothétiques à une troisième sont homothétiques entre elles et les trois centres d'homothétie sont collinéaires. En effet, en se reportant à la figure et aux notations alors usées, on voit bientôt que le triangle $M_4M_2M_3$ est homothétique à $D_4D_2D_3$, qui à son tour est homothétique à $A_4A_2A_3$.

Peut-être est-il digne de mentionner le cas particulier où M coïncide avec le centre du cercle des neuf points : il fournit le corollaire :

Si sur les rayons du cercle des neuf points menés aux milieux des côtés, on prend trois points également distants du centre, les droites joignant ces points aux sommets respectivement opposés aux côtés auxquels sont menés les rayons concourent en un point de la droite de Euler.

c) La propriété des figures homothétiques que je viens de mentionner m'a fait parvenir à un théorème sur le triangle que, à ma connaissance, personne n'a encore énoncé. Soient X, Y, Z les pieds des hauteurs d'un triangle ABC et X', Y', Z' les milieux des côtés du triangle orthique XYZ. Soient encore K_4 , K_2 , K_3 les sommets du triangle formé par les tangentes au cercle circonscrit à A B C menées par A, B, C. On sait que le point de Gergonne du triangle $K_4K_2K_3$ est point de Lemoine du triangle fondamental ABC et que les trois triangles $K_4K_2K_3$, XYZ, X'Y'Z' ont les côtés respectivement parallèles de sorte qu'ils sont homothétiques.

Les droites AK_1 , BK_2 , CK_3 sont les symédianes du triangle ABC et passent par les milieux des côtés du triangle orthique qui sont respectivement antiparallèles aux côtés de ABC. Il s'en suit que le centre d'homothétie des deux triangles X'Y'Z' et $K_4K_2K_3$ est le point de Lemoine K du triangle ABC. Le centre d'homothétie de XYZ et X'Y'Z' est leur barycentre G et le centre d'homo-

thétie de XYZ et $K_4K_2K_3$ sera un point P situé sur la droite GK. Et puisque le barycentre de XYZ et le point de Gergonne de $K_4K_2K_3$ sont sur GK, le barycentre de $K_4K_2K_3$ et le point de Gergonne de XYZ se trouveront aussi sur la même droite. Nous aurons donc le théorème :

Le point de Lemoine d'un triangle est situé sur la droite joi-

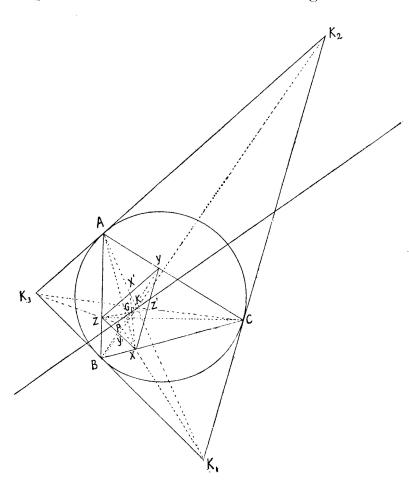


Fig. 1.

gnant le barycentre de son triangle orthique au barycentre du triangle formé des tangentes au cercle circonscrit menées par les sommets. Surcette droite sont situés aussi le point de Gergonne du triangle orthique et le point de concours des droites joignant les sommets du triangle formé par les tangentes aux pieds homologues des hauteurs du triangle fondamental. d) Soit encore ABC le triangle fondamental; dé-

crivons le cercle inscrit au triangle et touchant les côtés en A', B', C' et décrivons d'un rayon arbitraire un autre cercle concentrique au premier qui coupe les côtés du triangle en D, D', E, E', F, F'. Il en résultera manifestement :

$$DA' = A'D'$$
 $EB' = B'E'$ $FC' = C'F'$
 $AC' = AB'$ $BC' = BA'$ $CA' = CB'$

et les couples de droites FE' et F'E, DF' et D'F, DE' et D'E seront respectivement parallèles à C'B', C'A', A'B'. On peut considérer les six points D, D', E, E', F, F' comme intersections des côtés du triangle fondamental avec les côtés du triangle PQR, ou bien de P'Q'R' en désignant par P, Q, R, P', Q', R' les points de rencontre des trois couples de droites que je viens de considérer.

Remarquons que les triangles FE'P, C'B'A', F'EP' sont deux à deux homothétiques, A étant le centre d'homothétie, et que par suite les points A, P, A', P' sont en ligne droite. De même on

a la collinéation des points B, Q, B', Q' et C, R, C', R' et par conséquent les triangles PQR et P'Q'R' sont homothétiques à A'B'C', le centre d'homothétie étant au point de Gergonne G du triangle fondamental. Il est manifeste alors que les côtés de tout triangle homothétique à A'B'C', G étant le centre d'homothédétermineront sur les côtés du triangle fondamental six points situés

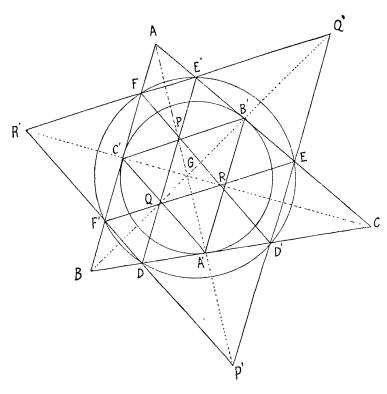


Fig. 2.

sur un cercle concentrique au cercle inscrit. En particulier les trois parallèles aux côtés de A'B'C' menées par G détermineront le cercle de Adams.

E. CANTONI.

X. — Lettre de M. Daniels (Fribourg, Suisse):

1. M. G. Franke (Ens. Math. VI, p. 407-409) démontre le théorème suivant :

Si $D_1D_2D_3$ sont les milieux des côtés d'un triangle, M le centre du cercle circonscrit, les droites A_1M_1 , A_2M_2 , A_3M_3 passent par un point de la droite d'Euler, pourvu que $M_1M_2M_3$ satisfassent aux conditions.

$$(D_1 M M_1) = (D_2 M M_2) = (D_3 M M_3)$$
.

Ce théorème n'est cependant qu'un cas spécial de celui-ci :

Si $D_4D_2D_3$ sont les milieux des côtés, P un point quelconque, les droites A_4P_4 , A_2P_2 , A_3P_3 passent par un point P' situé sur la droite qui relie le point P au centre de gravité G, pourvu que $P_4P_2P_3$ satisfassent aux conditions :

$$(D_1PP_1) = (D_2PP_2) = (D_3PP_3) \equiv \lambda .$$

La position du point P' est déterminée par l'équation :

$$(GPP') = \frac{2}{3}\lambda .$$

2. En effet, nous avons d'abord pour les milieux des côtés.

$$D_1 \equiv \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$$
 $D_2 \equiv \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1$ $D_3 \equiv \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$,

et si le point P est

$$P \equiv x_1 \mathbf{r}_1 + x_2 \mathbf{r}_2 + x_3 \mathbf{r}_3 ,$$

les points P_1 , P_2 , P_3 seront

$$P_1 \equiv -\frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{2} - \frac{\lambda(x_1\mathbf{r}_1 + x_2\mathbf{r}_2 + x_3\mathbf{r}_3)}{x_1 + x_2 + x_3} ,$$

ou encore

 $\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &\equiv -2\lambda x_1\mathbf{r}_1 + (x_1+x_2+x_3-2\lambda x_2)\mathbf{r}_2 + (x_1+x_2+x_3-2\lambda x_3)\mathbf{r}_3 \\ \text{etc.}; \text{ les droites } & \Lambda_4\mathbf{P}_4, \ , \Lambda_2\mathbf{P}_2, \ \Lambda_3\mathbf{P}_3 \text{ passent done par le point} \\ \mathbf{P}' &\equiv (x_1+x_2+x_3-2\lambda x_1)\mathbf{r}_1 + (x_1+x_2+x_3-2\lambda x_2)\mathbf{r}_2 + (x_1+x_2+x_3-2\lambda x_3)\mathbf{r}_3 \\ \text{qui, si nous introduisons les vecteurs } & \mathbf{r}_g \text{ et } & \mathbf{r}_p \text{ du centre de gravité et du point P peut s'écrire :} \end{aligned}$

$$P' \equiv 3r_g - 2\lambda r_p$$
.

Il s'ensuit

$$(GPP') = \frac{2\lambda}{3}.$$

3. Si l'on prend p. ex. pour P le centre du cercle inscrit

$$P \equiv a_1 \mathbf{r}_1 + a_2 \mathbf{r}_2 + a_3 \mathbf{r}_3$$

et $\lambda = 1$, les transversales angulaires $\Lambda_4 P_4$, $\Lambda_2 P_2$, $\Lambda_3 P_3$ sont parallèles aux droites PD_4 , PD_2 , PD_3 et le point P' devient

$$P' \equiv (a_2 + a_3 - a_1)r_1 + (a_3 + a_1 - a_2)r_2 + (a_1 + a_2 - a_3)r_3$$

c. à. d. le point de Nagel. Il s'ensuit 1° que les transversales angulaires du point de Nagel N sont parallèles aux droites qui relient le centre du cerçle inscrit l'aux milieux des côtés. 2° que G, I et N sont sur une droite et 3° que $(GIN) = \frac{2}{3}$. Si $N_1N_2N_3$ sont les autres points du groupe de Nagel et $I_4I_2I_3$ les centres des cercles exinscrits, on a de même

$$(GI_1N_1) = (GI_2N_2) = (GI_3N_3) = \frac{2}{3}$$
.

4. La relation $(GPP') = \frac{2\lambda}{3}$ ou $\frac{GP'}{GP} = \frac{2\lambda}{2\lambda - 3}$ nous prouve, que les figures décrites par les points correspondants P et P' sont semblable, si λ est constant. Leur centre de similitude est alors G.

M. Fr. Daniels.

XI. — Lettre de M. C. Stolp (Kampen, Hollande):

a) A propos de la lettre de M. Barbarin.

1. Le cercle circonscrit au triangle ABC et la conique I, lieu du point de Kariya, ont pour quatrième point d'intersection

$$x(r - R \cos \Lambda) = y(r - R \cos B) = z(r - R \cos C)$$
,

ce qui est aisé à vérifier.

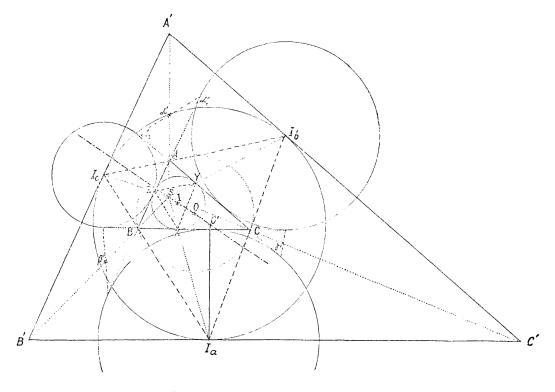


Fig. 3.

2. Comme nous verrons, on connaît depuis longtemps le point g' de M. Barbarin. Nommons 1, 1_a , 1_b , 1_c les centres des cercles tritangents; r, r_a , r_b , r_c leurs rayons; XYZ les contacts du cercle inscrit avec BC, CA, AB; O et O' les centres des cercles circonscrits aux triangles ABC et $1_a1_b1_c$; S le centre d'homothétie des triangles $1_a1_b1_c$ et XYZ, g et g' leurs barycentres; on sait que les points S, O', g, g' se trouvent sur la droite IO (Voir: Casex, A sequel to Euclid, Suppl. Chapt. Sect. VIII, Tritangent circles). Considérons en particulier le point S. Pour en trouver les coor-

¹ Le point S. notation de Casey, correspond au point φ' , notation de M. Barbarin.

L'Enseignement mathém., 7° année; 1905.

données trilinéaires, menons par l_a , l_b , l_c les droites B'C', C'A', $\Lambda'B'$ parallèles à BC, CA, ΛB . Les trois droites (en même temps tangentes au cercle $l_a l_b l_c$) déterminent un triangle $\Lambda'B'C'$ homothétique avec ΛBC par rapport au centre S. Les coordonnées y', z' du sommet Λ' étant $-r_b$, $-r_c$, la droite $\Lambda\Lambda'$ a pour équation

$$\frac{y}{r_b} = \frac{z}{r_c} \text{ ou } \frac{y}{\tan g \frac{B}{2}} = \frac{z}{\tan g \frac{C}{2}}$$

On en conclut que les droites AA', BB', CC' concourent au point

$$\frac{x}{\tan \frac{A}{2}} = \frac{y}{\tan \frac{B}{2}} = \frac{z}{\tan \frac{C}{2}},$$

inverse du point φ (page 238), et l'on observe que les points φ' et S sont identiques.

b) A propos de la lettre de M. Harold Hilton (page 237).

M. Hilton remarque que les triangles ABC, DEF sont réciproques par rapport à une circonférence de cercle. Il s'ensuit qu'on peut regarder comme donné *l'un ou l'autre* des deux triangles.

Si l'on choisit DEF pour triangle de référence, k étant le rayon de son cercle circonscrit, et qu'on désigne par ξ , η , ζ les distances d'un point quelconque aux côtés EF, FD, DE, on trouvera que la droite AD a pour équation

$$\eta(k \cos F \cos D + r \cos E) = \zeta(k \cos D \cos E + r \cos F)$$

et que AD, BE, CF, passent par le point P

 $\xi(k\cos E\cos F + r\cos D) = \eta(k\cos F\cos D + r\cos E) = \zeta(k\cos D\cos E + r\cos F).$

En faisant r = 0, $r = \infty$, r = k le point P coïncide avec les points suivants du triangle DEF: le centre O du cercle circonscrit, l'orthocentre II, le point de Lemoine K. Supposons les points D,E,F fixes; si l'on fait varier r le point P décrit une conique qui, passant par les sommets du triangle DEF et par son orthocentre, est une hyperbole équilatère. Son inverse est la droite d'Euler qu'elle coupe aux points II, O.

C. STOLP.

XII. — La Géométrie du triangle est une mine inépuisable de constructions et de propriétés des plus intéressantes. Les lettres qui nous sont adressées à propos de l'article de M. Kariya le prouvent suffisamment. Nous devons nous borner à mentionner encore les lettres de MM. Ant. Pleskot (Pilsen) et Aug. Tafelmacher (Santiago du Chili).

M. Pleskot fait intervenir le triangle A₁B₄C₄, polaire réciproque du triangle ABC par rapport à une conique arbitraire. Il prend ensuite pour conique un cercle de centre O; puis envisageant pour O quelques positions particulières, il obtient quelques propriétés très simples et les propriétés corrélatives en vertu du principe de Dualité. L'une de ces propriétés est précisément celle qu'exprime le théorème énoncé par M. Kariya.

M. Tafelmacher nous signale une Note sur les coordonnées homogènes obliques, destinée à la Zeitschrift f. math. u. naturw. Unterricht, dans laquelle il donne une démonstration du théorème de Kariya. On y trouvera, entre autres, l'expression de la puissance de point K par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC.

La RÉDACTION.

CHRONIQUE

Paul Tannery.

Les sciences mathématiques et historiques viennent de faire une grande perte en la personne de M. Paul Tannery, directeur de la manufacture des tabacs de Pantin, décédé le 27 novembre dernier à l'âge de 61 ans. Sa mort subite a été une douloureuse surprise pour tous ceux qui l'ont connu et tout particulièrement pour ceux qui ont encore eu l'occasion de l'approcher au Congrès des mathématiciens à Heidelberg et au Congrès de philosophie et d'histoire des sciences à Genève.

Ancien élève de l'Ecole polytechnique de Paris, Tannery sortit dans le corps des ingénieurs des tabacs, où il suivit régulièrement la carrière, ce qui ne l'empècha pas de rester en contact avec la science pure. Il consacra ses loisirs principalement à l'histoire des sciences et à la philosophie. D'une remarquable érudition pour tout ce qui touche à l'histoire des sciences, il était connu aussi bien des mathématiciens et des physiciens, que des hellénistes et des philologues. Il fut l'un des principaux organisateurs des congrès d'histoire des sciences. Ses travaux ont été publiés notamment dans le Bulletin des sciences mathématiques, l'Archie für Geschichte der Philosophie, la Reque de philosophie, la Reque de philosophie, la Reque de Philologie, et dans Bibliotheca