

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 7 (1905)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES DEUX BASES DE LA MÉTRIQUE
Autor: Combebiac
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-8445>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LES DEUX BASES DE LA MÉTRIQUE

Un coup d'œil d'ensemble jeté sur les nombreux travaux concernant les Principes de la Géométrie qui ont vu le jour dans le dernier demi-siècle laisse apercevoir une différence radicale (sans contradiction d'ailleurs) entre les tendances de ces travaux, suivant qu'il y est fait ou non emploi des ressources de l'Analyse mathématique. Tandis que le concept qui fait l'objet des études analytiques est le « déplacement sans déformation » (Helmholtz, Cayley, Sophus Lie) ou encore l'« élément linéaire » (Riemann), les travaux purement logiques ont pris jusqu'à présent pour concepts fondamentaux la droite, le plan, la congruence de deux segments et celle de deux angles.

De ces deux tendances, la plus conforme à la nature des choses est incontestablement celle qu'accusent les travaux analytiques, car il est manifeste que, psychologiquement, les concepts métriques ont bien leur origine dans la notion du déplacement d'une figure invariable. C'est en outre aux travaux analytiques que l'on doit la pleine clarté dans laquelle apparaît à présent la question dite des Fondements de la Géométrie, qui est en réalité celle des Fondements de la Métrique. On a essayé, dans un article précédent, de *géométriser* les investigations analytiques afin d'affranchir le domaine géométrique de l'ingérence de l'Analyse et de permettre une plus grande diffusion des résultats dus à cette dernière. Une première conclusion s'impose, que nous énoncerons en employant les termes introduits et définis dans ledit article.

Les propriétés métriques des figures, c'est-à-dire toutes les propositions de la Géométrie traditionnelle, résultent du fait suivant : *les déplacements sans déformation sont des*

transformations ponctuelles formant un groupe métrique archimédien dont les lignes axiales jouissent de la propriété de l'unicité de l'asymptotique.

Il est clair, d'après cela, que la Géométrie traditionnelle, c'est-à-dire la Théorie des déplacements sans déformation, ne saurait être considérée comme la « Science de l'espace » et qu'il est temps de faire cesser une confusion due probablement à la généralisation naturelle qu'a subie le sens d'un mot, phénomène linguistique d'ailleurs très commun, la notion du particulier devançant habituellement celle du général, auquel il transmet ensuite sa dénomination. Si donc l'on veut maintenir au mot « Géométrie » son sens le plus général — et c'est le plus sage —, il convient d'attribuer un nom spécial à la Théorie des déplacements sans déformation ou mieux à cette théorie généralisée. Ce nom paraît devoir être la « Métrique. »

De là résulte aussi la possibilité d'établir une théorie générale des métriques ou, si l'on veut, une Métrique générale sans faire appel à aucun concept spécial, ainsi d'ailleurs que cela a été fait dans l'article précédent.

Ces divers résultats ont pour effet de *situer* d'une manière précise la Métrique dans la Géométrie.

Ces conclusions se retrouvent d'ailleurs si l'on adopte, pour édifier la Métrique, les Principes pris pour base dans les travaux qui ont été caractérisés par le qualificatif de « logiques » ; il est toutefois nécessaire, pour cela, de faire subir au préalable à ces Principes certaines modifications, dont la nature et le résultat vont être maintenant exposés.

Nous prendrons pour représentant de ces travaux le Mémoire de M. HILBERT¹ sur les Fondements de la Géométrie, mémoire digne de l'admiration des Mathématiciens et appelé à marquer une date importante dans la Philosophie scientifique.²

M. Hilbert se place au point de vue logique, c'est-à-dire

¹ HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1899 ; traduit en français par M. Laugel, Gauthier-Villars, Paris, 1900.

² Les axiomes adoptés par M. Hilbert ne diffèrent guère au fond de ceux qui avaient déjà été mis en lumière dans les belles études consacrées, en ces dix dernières années, à la question des principes de la Géométrie. Citons notamment les travaux de MM. Veronese, Pieri, Padoa et Peano.

qu'il n'admet comme concepts fondamentaux que ceux qui font partie du domaine le plus général de l'intelligence, à l'exclusion notamment de tout concept *géométrique* (c'est-à-dire *spatial*). Quant aux mots qui expriment des idées géométriques, tels que les mots : point, droite, plan, situé, congruent, etc., ils doivent être employés sans aucune signification : ils entrent dans le discours avec les seules propriétés logiques qui leur sont attribuées conventionnellement par des propositions appelées *axiomes*. (Dans ces conditions, il serait peut-être préférable de remplacer ces mots par des signes conventionnels, qui n'auraient pas l'inconvénient d'évoquer des images visuelles.)

De ces axiomes, M. Hilbert déduit, par de simples transformations logiques, les propositions de la Géométrie ou plutôt — car il faut signaler encore là cette confusion tenace — de la Métrique.

Nous ferons subir une première transformation aux axiomes de M. Hilbert, tout en évitant d'en reproduire l'énoncé, qui occuperait plusieurs pages. Pour cela, restituant aux termes proprement géométriques leur sens habituel, nous allégeons le système d'axiomes de tout ce qui, dans leur énoncé, est une simple conséquence des conceptions géométriques *générales*. On conçoit en effet que, si la signification des axiomes métriques (et non pas géométriques) de M. Hilbert n'est plus exclusivement logique, mais si ceux-ci, au contraire, représentent des faits géométriques, certains doivent se simplifier et d'autres devenir superflus. M. Hilbert pose, par exemple, sous le titre d'Axiomes de distribution, un groupe d'axiomes, parmi lesquels nous citerons les deux suivants :

1^o A, B, C désignant trois points en ligne droite, si B est situé entre A et C, il l'est aussi entre C et A.

2^o A et C désignant deux points d'une droite, il y a au moins un point B situé entre A et C et au moins un point D tel que C soit situé entre A et D.

Il est évident que ces axiomes doivent disparaître si l'on considère comme acquises les propriétés générales des figures, conformément à ce qui a été admis dans les paragraphes précédents, et si l'on émet en outre la proposition suivante :

Une droite est une ligne continue, ouverte et sans points doubles.

D'autres axiomes concernant le plan disparaissent également moyennant une définition appropriée de cette surface.

Le système d'axiomes de M. Hilbert, ainsi allégé, comporte, en plus des concepts généraux, ceux de *droite*, *plan*, *congruence de deux segments* (ou de deux couples de points), *congruence de deux angles* (ou de deux couples de droites concourantes), l'égalité ou congruence des figures quelconques, étant d'ailleurs définie par la congruence des segments et des angles.

Ce système doit subir une seconde transformation ou plutôt une généralisation ayant pour but d'en faire disparaître totalement les mots de droite et de plan, de manière à lui donner le même degré de généralité que possède le système d'axiomes par lesquels ont été caractérisés les groupes métriques et de rendre ainsi les deux systèmes comparables. Il suffit pour cela de remplacer les droites et les plans par des lignes et des surfaces constituant des ensembles dotés de propriétés qui vont être précisées. Le système d'axiomes de M. Hilbert, ainsi géométrisé et généralisé, peut être exposé de la manière suivante :

Soit un ensemble de lignes D, satisfaisant aux propriétés suivantes :

P I. — Une ligne de l'ensemble est déterminée par deux quelconques de ses points.

P II. — Les lignes D qui s'appuient sur deux lignes D concourantes sont situées sur une même surface.

DÉFINITION. — On appellera surface P toute surface engendrée par une ligne D variable passant par un point fixe et s'appuyant sur une autre ligne D qui ne passe pas par ce point.

On considère une certaine relation susceptible d'avoir lieu entre deux couples de points. A cette relation, qui sera appelée CONGRUENCE, sont attribuées les propriétés suivantes :

C I. — Si l'on désigne par A, B deux points et par A' un point d'une droite, on pourra toujours, sur cette droite, d'un côté donné de A', déterminer un point et un seul B' tel que

le couple (A, B) soit congruent au couple (A', B'). Un couple de points est congruent à lui-même.

C II. — Le couple (A, B) est congruent à (B, A).

C III. — Deux couples de points congruents à un troisième sont congruents entre eux.

C IV. — Soit trois points A, B, C en ligne droite, B étant situé entre A et C ; soit de même trois points A', B', C' également en ligne droite, B' étant situé entre A' et C' ; si les couples (A, B) et (A', B') d'une part (B, C) et (B', C') d'autre part, sont respectivement congruents, il en sera de même des couples (A, C) et (A', C').

On considère en outre une certaine relation susceptible d'avoir lieu entre deux couples de lignes D concourantes (ou angles). A cette relation, qui sera également appelée CONGRUENCE, sont attribuées des propriétés exactement correspondantes à celles qui sont exprimées par C I, C II et C III, les points en ligne droite étant simplement remplacés par des lignes D concourantes et situées sur la même surface P . Enfin l'on admet la proposition suivante :

C V. — Si deux figures constituées chacune par trois points (A, B, C et A', B', C'), sont telles qu'il y ait congruence entre les couples de points :

$$\begin{aligned} & (A, B) \text{ et } (A', B'), \\ & (A, C) \text{ et } (A', C'), \end{aligned}$$

et entre les couples de lignes D :

$$(AB, AC) \text{ et } (A'B', A'C'),$$

il y aura également congruence entre les couples de lignes D :

$$\begin{aligned} & (BA, BC) \text{ et } (B'A', B'C'), \\ & (CA, CB) \text{ et } (C'A', C'B'), \end{aligned}$$

Sur la base ainsi exposée, on peut établir une théorie de la congruence des figures, c'est-à-dire une Métrique; une telle théorie a un caractère pleinement géométrique, en revanche elle est manifestement indépendante de tout concept spécial d'origine métrique, tel que droite, plan, etc.

Il est maintenant facile d'établir un parallèle entre cette théorie de la congruence géométrique et la théorie de la congruence relative aux groupes métriques qui fait l'objet de notre précédent article (p. 270-291).

Les propriétés P I et P II, attribuées aux lignes D, appartiennent aux lignes axiales d'un groupe métrique d'après les théorèmes II 8 et 17. Les propriétés attribuées à la relation de congruence par les axiomes CI à CV et par ceux qui n'ont pas été explicitement énoncés appartiennent à la congruence relative à un groupe métrique en vertu des théorèmes I 1, II 20, 21, 22, 23 et 24 sous la condition de prendre pour lignes D et pour surfaces P les lignes axiales et les surfaces axiales du groupe. La congruence relative à un groupe métrique remplit donc toutes les conditions émises à titre d'axiomes par M. Hilbert (il serait d'ailleurs facile de voir que ces conditions suffisent à caractériser complètement cette sorte de congruence).

M. Hilbert adjoint enfin à ces conditions : 1^o sous le titre d'axiome d'Archimède, une proposition qui revient à attribuer au groupe métrique correspondant la propriété archimédienne; 2^o sous le titre d'axiome des parallèles, une proposition attribuant à l'ensemble des lignes D la propriété de l'unicité de l'asymptotique. Il résulte du Mémoire de M. Hilbert que, moyennant l'adoption de ces axiomes, toutes les propositions de la Géométrie traditionnelle, c'est-à-dire de la Métrique, peuvent être établies par simple déduction logique. D'autre part, les propriétés exprimées par ces axiomes appartiennent, en vertu de théorèmes et de définitions contenus dans la théorie qui fait l'objet de l'article précédent, à tout groupe métrique archimédien dont les lignes axiales forment un ensemble jouissant de la propriété de l'unicité de l'asymptotique ; on en conclut que la teneur de cet article constitue une base suffisante pour la Métrique, et c'est ce que nous tenions à établir.

Les deux bases de la Métrique qui viennent d'être exposées sont équivalentes, mais elles diffèrent par certains caractères. La notion du groupe métrique se rattache directement aux conceptions habituelles et présente en outre une significa-

tion géométrique parfaitement claire ; celle de la congruence, uniquement définie par ses propriétés, est factice et ne correspond pas forcément *à priori* à une réalité géométrique : on serait plutôt tenté de penser qu'il y a peu de probabilité pour qu'il existe, entre les figures, une sorte de relation satisfaisant à toutes les conditions requises. En revanche, l'emploi de ce procédé accroît la faculté de généralisation de la Métrique : on peut en effet, par l'abandon de certains des axiomes de M. Hilbert, obtenir des métriques ne rentrant pas dans la catégorie de celles qui reposent sur la congruence relative aux groupes de transformations ponctuelles.

COMBEBIAC (Limoges).

ERRATA.

Corrections à l'article : *Théorie géométrique des groupes métriques* (n° du 15 juillet 1905, p. 270-291).

Page 282, avant-dernière ligne : au lieu de « théorème G », il faut « théorème 6 ».

Page 289, 23^e ligne : au lieu de « tout l'ensemble », il faut : « tout ensemble ».

Page 290, 6^e ligne : au lieu de : « par une transformation convenablement choisie, d'un groupe métrique déterminé, par exemple du groupe des « déplacements sans déformation. Mais on admet ainsi l'existence d'un « groupe métrique. »

il faut :

« par une transformation convenablement choisie, soit du groupe des déplacements euclidiens, soit d'un groupe conservant un ellipsoïde réel ou « imaginaire (à centre réel). Mais on admet ainsi l'existence de ces groupes. »
