desquels découlent les théorèmes de Cauchy sur les intégrales des fonctions monogènes d'une variable complexe.

I

Soit $f(x)$ une fonction de la variable réelle x, uniforme et finie dans l'intervalle.

$$p < x < q \,.$$

Pour démontrer l'existence de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx \,, \tag{1}$$

a, b étant deux valeurs situées entre p et q, il faut démontrer, selon Riemann [1], que la somme

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, f(\xi_{k-1}) \tag{2}$$

tend vers une limite déterminée, si l'on augmente le nombre n-1 des points $x_1, \ldots, x_{n-1}$, partageant l'intervalle $a \ldots b$ ($a = x_0$, $b = x_n$) en n parties, de manière que l'étendue de chacune des parties devienne aussi petite que l'on veut, et que cette limite soit indépendante du choix des points $x_1, \ldots, x_{n-1}$ et des points intermédiaires ξ_{k-1},

$$x_{k-1} \leqq \xi_{k-1} < x_k \,.$$

Si l'on forme la somme (2) pour les mêmes points $x_1, \ldots, x_{n-1}$, mais, pour deux séries différentes de valeurs intermédiaires ξ_{k-1} et $\bar{\xi}_{k-1}$:

$$S_1 = \sum_k (x_k - x_{k-1})\, f(\xi_{k-1}) \,,$$

$$S_2 = \sum_k (x_k - x_{k-1})\, f(\bar{\xi}_{k-1}) \,,$$

[1] *Werke*, (1892), p. 239.

la condition nécessaire et suffisante pour que la différence $S_1 - S_2$ devienne aussi petite que l'on veut en augmentant le nombre n de la dite manière, consiste — comme on sait — en ce que

$$\lim_{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, \sigma_{k-1} = 0\,, \tag{3}$$

en désignant par σ_{k-1} l'*oscillation* de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $x_{k-1} \ldots x_k$, c'est-à-dire, la différence entre les valeurs extrêmes, dont la fonction $f(x)$ est capable dans cet intervalle. Quant à la démonstration que cette condition est suffisante pour que les sommes (2), formées avec des séries différentes de points de partition $x_1, \ldots, x_{n-1}$, tendent vers une limite commune, elle se fait ordinairement en appliquant le principe de la superposition des partitions, due à CAUCHY[1]. Je vais montrer, en m'appuyant à une remarque due à KRONECKER[2] que l'application du principe mentionné devient superflu, si l'on étend de la manière suivante le sens de la condition (3).

Soient $\zeta_{k-1} \ldots \zeta_k$ des intervalles embrassant les intervalles $x_{k-1} \ldots x_k$, mais tels que $\zeta_k - \zeta_{k-1}$ tende vers zéro en même temps que $x_k - x_{k-1}$; ces intervalles plus grands pourront d'ailleurs pénétrer l'un dans l'autre. En désignant alors par σ_{k-1} l'oscillation de $f(x)$ dans l'intervalle $\zeta_{k-1} \ldots \zeta_k$ et par $\xi_{k-1}, \bar{\xi}_{k-1}$ deux valeurs intermédiaires du même intervalle, la condition (3) continuera d'être nécessaire et suffisante pour que les sommes S_1, S_2 se rapprochent indéfiniment.

Augmentons maintenant le nombre n des parties $(x_{k-1} \ldots x_k$ selon une loi arbitraire, de manière que ces parties tendent vers zéro, et soient

$$S_{n_1}\,,\; S_{n_2}\,,\; \ldots$$

les sommes (2), formées pour les partitions successives avec des valeurs intermédiaires quelconques; il faut démontrer

[1] *Résumé des leçons*, etc. (1823), p. 81.

[2] *Vorlesungen über Integrale* (1894), p. 6-7.

qu'étant δ une petite quantité positive donnée à l'avance, on puisse déterminer le nombre N de manière que l'on ait

$$| S_{n_{\lambda+\nu}} - S_{n_\nu} | < \delta$$

pour $\nu > N$ et λ arbitraire, c'est-à-dire que $\lim_\nu S_{n_\nu}$ existe. Puis il faut démontrer que cette limite soit indépendante de la manière, dont le nombre n a été augmenté. Soient donc $x_1, \ldots, x_{n-1}$, avec les valeurs intermédiaires $\xi_0, \ldots \xi_{n-1}$, et $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{m-1}$, avec les valeurs intermédiaires $\bar{\xi}_0, \ldots, \bar{\xi}_{m-1}$, deux partitions, et

$$S = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\xi_{k-1}) ,$$

$$T = \sum_{k=1}^{m} (\mathfrak{x}_k - \mathfrak{x}_{k-1}) f(\bar{\xi}_{k-1})$$

les sommes correspondantes, il suffira d'établir que la différence T-S tende vers zéro, si l'on fait croître n et m de manière que les différences $x_k - x_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ et $\mathfrak{x}_k - \mathfrak{x}_{k-1}$ $(k=1,2,\ldots,m)$ deviennent infiniment petites. A cet effet, désignons par $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_{n+m-2}$ les valeurs x_k et $\mathfrak{x}_k$, rangées par ordre croissant, et soit l'intervalle $\mathfrak{X}_{\lambda-1} \ldots \mathfrak{X}_\lambda$ contenu dans l'intervalle $x_{\lambda_i-1} \ldots x_{\lambda_i}$ et dans l'intervalle $\mathfrak{x}_{\lambda_k-1} \ldots \mathfrak{x}_{\lambda_k}$; alors il est évident que nous aurons :

$$S = \sum_{\lambda=1}^{m+n-1} (\mathfrak{X}_\lambda - \mathfrak{X}_{\lambda-1}) f(\xi_{\lambda_i-1}) ,$$

$$T = \sum_{\lambda=1}^{m+n-1} (\mathfrak{X}_\lambda - \mathfrak{X}_{\lambda-1}) f(\bar{\xi}_{\lambda_k-1}) .$$

Mais écrites de telle manière, les sommes S et T rentrent sous la forme des sommes S_1, S_2 prises dans le sens étendu, parce qu'en réunissant les intervalles $x_{\lambda_i-1} \cdots x_{\lambda_i}$ et $\mathfrak{x}_{\lambda_k-1} \cdots \mathfrak{x}_{\lambda_k}$, on obtient un intervalle $\zeta_{\lambda-1} \ldots \zeta_\lambda$ qui contient les points ξ_{λ_i-1}

et $\bar{\xi}_{\lambda_{\overline{k}}-1}$, embrasse à la fois l'intervalle $\mathfrak{X}_{\lambda-1} \dots \mathfrak{X}_{\lambda}$ et devient infiniment petit en même temps que $\mathfrak{X}_{\lambda-1} \dots \mathfrak{X}_{\lambda}$. La condition (3) est donc suffisante pour que S et T tendent vers une limite commune, *c. q. f. d.*

Il est évident que cette condition se trouve satisfaite, — aussi dans le sens étendu, — si $f(x)$ est une fonction continue, au sens de Cauchy, dans l'intervalle $p \dots q$.

II

Soient $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$ deux fonctions des variables réelles ξ, η qui, à l'intérieur d'un domaine S simplement connexe du plan des (ξ, η), sont uniformes et finis et admettent des dérivées partielles par rapport à ξ et η. Si la condition d'intégrabilité.

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial Q}{\partial \xi} \tag{1}$$

se trouve satisfaite à l'intérieur de S, l'équation différentielle

$$du = P d\xi + Q d\eta \tag{2}$$

possède une solution u qui est une fonction des deux variables indépendantes ξ, η uniforme à l'intérieur de S, et qui s'évanouit pour un point (ξ_0, η_0) de S, donné arbitrairement. C'est ce que nous allons démontrer, sans faire usage des notions de l'intégrale curviligne et de l'intégrale double ; au contraire, notre démonstration nous va permettre de démontrer d'une manière extrêmement simple les théorèmes classiques, relatifs aux intégrales curvilignes. Nous allons procéder suivant Euler [1].

1. Soient (ξ_0, η_0) et (ξ, η) deux points de S, tels que le rectangle déterminé par les points (ξ_0, η_0), (ξ, η_0), (ξ, η), (ξ_0, η) — qui seront désignés aussi par A, B, C, D — se trouve entièrement à l'intérieur de S. Nous considérons les deux expressions

[1] Voir *Institutiones calculi integralis*, t. I, caput II, art. 448 et suiv.