

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 7 (1905)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES POINTS ÉLÉMENTAIRES DU CALCUL INTÉGRAL
Autor: Schlesinger, L.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-8443>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

fait remarquer plus haut. Mais ce cas particulier représente des avantages considérables et se trouve à un degré de développement plus haut que la méthode générale. Nous avons déjà vu que son introduction diminue considérablement la durée de la solution du problème. Mais ce n'est pas tout ; il apporte dans le procédé de la recherche de l'inconnu d'après la méthode des essais une plus grande précision, et dans quelques cas, comme par exemple dans le problème envisagé plus haut, dans la règle d'alliages, il rend ces procédés absolument précis. Enfin, exigeant une compréhension fondamentale du problème, et, en général une certaine maturité d'esprit, il constitue la plus haute expression de la méthode des essais, dont la possession et l'usage conscients ne peuvent être accessibles à l'homme avant qu'il soit parvenu à un degré assez élevé de développement intellectuel. Grâce à ces qualités, beaucoup de questions deviennent parfaitement accessibles à la méthode des essais ; le succès de leur solution représente, d'après ce qui a été dit, des difficultés considérables, souvent insurmontables, ou bien il est dû quelquefois, au hasard.

V. BOBYNIN (Moscou).

(Traduit par V. Fréedericksz, Genève).

SUR QUELQUES POINTS ÉLÉMENTAIRES DU CALCUL INTÉGRAL

Dans les lignes suivantes je me permets de communiquer deux remarques qui m'ont été utiles dans mon Cours universitaire sur le Calcul intégral ; la première se rapporte à la démonstration de l'existence de l'intégrale définie d'une fonction d'une seule variable réelle, l'autre à la notion de l'intégrale curviligne d'une différentielle exacte et à la démonstration des théorèmes fondamentaux, relatifs à ces intégrales.

desquels découlent les théorèmes de CAUCHY sur les intégrales des fonctions monogènes d'une variable complexe.

I

Soit $f(x)$ une fonction de la variable réelle x , uniforme et finie dans l'intervalle.

$$p < x < q .$$

Pour démontrer l'existence de l'intégrale

$$(1) \quad \int_a^b f(x) dx ,$$

a, b étant deux valeurs situées entre p et q , il faut démontrer, selon RIEMANN¹, que la somme

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(\xi_{k-1})$$

tend vers une limite déterminée, si l'on augmente le nombre $n-1$ des points x_1, \dots, x_{n-1} , partageant l'intervalle $a \dots b$ ($a = x_0$, $b = x_n$) en n parties, de manière que l'étendue de chacune des parties devienne aussi petite que l'on veut, et que cette limite soit indépendante du choix des points x_1, \dots, x_{n-1} et des points intermédiaires ξ_{k-1} ,

$$x_{k-1} \leq \xi_{k-1} < x_k .$$

Si l'on forme la somme (2) pour les mêmes points x_1, \dots, x_{n-1} , mais, pour deux séries différentes de valeurs intermédiaires ξ_{k-1} et $\bar{\xi}_{k-1}$:

$$S_1 = \sum_k (x_k - x_{k-1}) f(\xi_{k-1}) ,$$

$$S_2 = \sum_k (x_k - x_{k-1}) f(\bar{\xi}_{k-1}) ,$$

¹ Werke, (1892), p. 239.

la condition nécessaire et suffisante pour que la différence $S_1 - S_2$ devienne aussi petite que l'on veut en augmentant le nombre n de la dite manière, consiste — comme on sait — en ce que

$$(3) \quad \lim_n \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \sigma_{k-1} = 0,$$

en désignant par σ_{k-1} l'*oscillation* de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $x_{k-1} \dots x_k$, c'est-à-dire, la différence entre les valeurs extrêmes, dont la fonction $f(x)$ est capable dans cet intervalle. Quant à la démonstration que cette condition est suffisante pour que les sommes (2), formées avec des séries différentes de points de partition x_1, \dots, x_{n-1} , tendent vers une limite commune, elle se fait ordinairement en appliquant le principe de la superposition des partitions, due à CAUCHY¹. Je vais montrer, en m'appuyant à une remarque due à KRONECKER² que l'application du principe mentionné devient superflu, si l'on étend de la manière suivante le sens de la condition (3).

Soient $\zeta_{k-1} \dots \zeta_k$ des intervalles embrassant les intervalles $x_{k-1} \dots x_k$, mais tels que $\zeta_k - \zeta_{k-1}$ tende vers zéro en même temps que $x_k - x_{k-1}$; ces intervalles plus grands pourront d'ailleurs pénétrer l'un dans l'autre. En désignant alors par σ_{k-1} l'oscillation de $f(x)$ dans l'intervalle $\zeta_{k-1} \dots \zeta_k$ et par $\xi_{k-1}, \bar{\xi}_{k-1}$ deux valeurs intermédiaires du même intervalle, la condition (3) continuera d'être nécessaire et suffisante pour que les sommes S_1, S_2 se rapprochent indéfiniment.

Augmentons maintenant le nombre n des parties $(x_{k-1} \dots x_k)$ selon une loi arbitraire, de manière que ces parties tendent vers zéro, et soient

$$S_{n_1}, S_{n_2}, \dots$$

les sommes (2), formées pour les partitions successives avec des valeurs intermédiaires quelconques; il faut démontrer

¹ *Résumé des leçons, etc.* (1823), p. 81.

² *Vorlesungen über Integrale* (1894), p. 6-7.

qu'étant δ une petite quantité positive donnée à l'avance, on puisse déterminer le nombre N de manière que l'on ait

$$|S_{n_{\lambda+\nu}} - S_{n_\nu}| < \delta$$

pour $\nu > N$ et λ arbitraire, c'est-à-dire que $\lim_{\nu} S_{n_\nu}$ existe. Puis il faut démontrer que cette limite soit indépendante de la manière, dont le nombre n a été augmenté. Soient donc x_1, \dots, x_{n-1} , avec les valeurs intermédiaires ξ_0, \dots, ξ_{n-1} , et x_1, \dots, x_{m-1} , avec les valeurs intermédiaires ξ_0, \dots, ξ_{m-1} , deux partitions, et

$$S = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(\xi_{k-1}),$$

$$T = \sum_{k=1}^m (x_k - x_{k-1}) f(\xi_{k-1})$$

les sommes correspondantes, il suffira d'établir que la différence $T-S$ tende vers zéro, si l'on fait croître n et m de manière que les différences $x_k - x_{k-1}$ ($k=1, 2, \dots, n$) et $x_k - x_{k-1}$ ($k=1, 2, \dots, m$) deviennent infiniment petites. A cet effet, désignons par $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_{n+m-2}$ les valeurs x_k et x_k , rangées par ordre croissant, et soit l'intervalle $\mathfrak{X}_{\lambda-1} \dots \mathfrak{X}_\lambda$ contenu dans l'intervalle $x_{\lambda_i-1} \dots x_{\lambda_i}$ et dans l'intervalle $x_{\lambda_k-1} \dots x_{\lambda_k}$; alors il est évident que nous aurons :

$$S = \sum_{\lambda=1}^{m+n-1} (\mathfrak{X}_\lambda - \mathfrak{X}_{\lambda-1}) f(\xi_{\lambda_i-1}),$$

$$T = \sum_{\lambda=1}^{m+n-1} (\mathfrak{X}_\lambda - \mathfrak{X}_{\lambda-1}) f(\xi_{\lambda_k-1}).$$

Mais écrites de telle manière, les sommes S et T rentrent sous la forme des sommes S_1, S_2 prises dans le sens étendu, parce qu'en réunissant les intervalles $x_{\lambda_i-1} \dots x_{\lambda_i}$ et $x_{\lambda_k-1} \dots x_{\lambda_k}$, on obtient un intervalle $\zeta_{\lambda-1} \dots \zeta_\lambda$ qui contient les points ξ_{λ_i-1}

et $\bar{\xi}_{\lambda-k-1}$, embrasse à la fois l'intervalle $\mathfrak{X}_{\lambda-1} \dots \mathfrak{X}_{\lambda}$ et devient infiniment petit en même temps que $\mathfrak{X}_{\lambda-1} \dots \mathfrak{X}_{\lambda}$. La condition (3) est donc suffisante pour que S et T tendent vers une limite commune, *c. q. f. d.*

Il est évident que cette condition se trouve satisfaite, — aussi dans le sens étendu, — si $f(x)$ est une fonction continue, au sens de CAUCHY, dans l'intervalle $p \dots q$.

II

Soient $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$ deux fonctions des variables réelles ξ, η qui, à l'intérieur d'un domaine S simplement connexe du plan des (ξ, η) , sont uniformes et finis et admettent des dérivées partielles par rapport à ξ et η . Si la condition d'intégrabilité.

$$(1) \quad \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial Q}{\partial \xi}$$

se trouve satisfaite à l'intérieur de S, l'équation différentielle

$$(2) \quad du = Pd\xi + Qd\eta$$

possède une solution u qui est une fonction des deux variables indépendantes ξ, η uniforme à l'intérieur de S, et qui s'évanouit pour un point (ξ_0, η_0) de S, donné arbitrairement. C'est ce que nous allons démontrer, sans faire usage des notions de l'intégrale curviligne et de l'intégrale double ; au contraire, notre démonstration nous va permettre de démontrer d'une manière extrêmement simple les théorèmes classiques, relatifs aux intégrales curvilignes. Nous allons procéder suivant EULER ¹.

1. Soient (ξ_0, η_0) et (ξ, η) deux points de S, tels que le rectangle déterminé par les points (ξ_0, η_0) , (ξ, η_0) , (ξ, η) , (ξ_0, η) — qui seront désignés aussi par A, B, C, D — se trouve entièrement à l'intérieur de S. Nous considérons les deux expressions

¹ Voir *Institutiones calculi integralis*, t. I, caput II, art. 448 et suiv.

$$(3) \quad v = \int_{\eta_0}^{\eta} Q(\xi_0, \eta) d\eta + \int_{\xi_0}^{\xi} P(\xi, \eta) d\xi ,$$

$$(4) \quad \bar{v} = \int_{\xi_0}^{\xi} P(\xi, \eta_0) d\xi + \int_{\eta_0}^{\eta} Q(\xi, \eta) d\eta ,$$

qui pourront être caractérisées de manière, que la première v se rapporte à la *marche supérieure* (AD, DC), l'autre \bar{v} à la *marche inférieure* (AB, BC), joignant les points A et C. Nous allons démontrer que v et \bar{v} satisfont à l'équation (2) et que ces deux expressions sont identiques, c'est-à-dire que l'on a les équations

$$(5) \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} = P , \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} = Q ,$$

$$(6) \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} = Q , \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} = P .$$

$$(7) \quad \bar{v} - v = 0 .$$

Les deux équations (5) se vérifient immédiatement; quant aux équations (6), il suffira de donner la démonstration de la première.

Posons à cet effet

$$(8) \quad w = \int_{\xi_0}^{\xi} P(\xi, \eta) d\xi ,$$

nous aurons ¹

$$(9) \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} = Q(\xi_0, \eta) + \frac{\partial w}{\partial \eta} .$$

Mais

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(Q(\xi, \eta) - \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right) ,$$

¹ C. f. EULER, *l. c.*, art. 448. Pour que les calculs suivants soient légitimes, il faut imposer aux fonctions P, Q encore certaines conditions supplémentaires que l'on va tirer facilement de ces calculs mêmes.

donc en vertu de la condition d'intégrabilité (1)

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left(Q(\xi, \eta) - \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) = 0 ,$$

c'est-à-dire que l'expression.

$$(11) \quad Q(\xi, \eta) - \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = F(\eta)$$

est indépendante de ξ . Etant

$$(12) \quad \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \omega = 0 , \quad \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = 0 ,$$

on aura donc

$$Q(\xi_0, \eta) = F(\eta) ,$$

et d'après les équations (11) et (9),

$$\frac{\partial \omega}{\partial \eta} = Q(\xi, \eta) - Q(\xi_0, \eta) ,$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial \eta} = Q(\xi, \eta) , \quad \text{c. q. f. d.}$$

Pour démontrer l'équation (7), nous remplaçons dans les limites supérieures de $\nu, \bar{\nu}$ les ξ, η par ξ_1, η_1 ; l'équation (7) s'écrit alors :

$$(7a) \quad \int_{\xi_0}^{\xi_1} P(\xi, \eta_0) d\xi + \int_{\eta_0}^{\eta_1} Q(\xi_1, \eta) d\eta + \int_{\xi_1}^{\xi_0} P(\xi, \eta_1) d\xi + \int_{\eta_1}^{\eta_0} Q(\xi_0, \eta) d\eta = 0 ,$$

équation qui peut s'énoncer en disant que l'intégrale de la différentielle exacte $P d\xi + Q d\eta$, menée au sens positif sur la périphérie du rectangle (A B C D) s'évanouit; l'équation (7) n'est donc autre chose que le théorème de RIEMANN-CAUCHY ¹ pour le cas du rectangle (A B C D) ².

¹ RIEMANN, Werke (1892), p. 15, I.

² Quant à l'équation (7), EULER n'en donne pas de démonstration explicite, il s'exprime comme il suit (l. c., art. 452) : « Ex rei natura patet, perinde esse utra via procedatur necesse enim est ad eandem æquationem integram perveniri ». Mais la démonstration qu'on va lire dans le texte, ne fait usage que des moyens qu'EULER avait à sa disposition.

Soit (ξ, η) un point quelconque à l'intérieur de $(ABCD)$ et posons

$$s(\xi, \eta) = \int_{\xi_0}^{\xi} P(\xi, \eta) d\xi + \int_{\eta_0}^{\eta} Q(\xi_0, \eta) d\eta,$$

nous aurons, d'après ce qui précède,

$$(13) \quad \frac{\partial s}{\partial \eta} = Q(\xi, \eta),$$

et le premier membre de l'équation (7a) pourra s'écrire :

$$\int_{\eta_0}^{\eta_1} Q(\xi_1, \eta) d\eta - s(\xi_1, \eta_1) + s(\xi_1, \eta_0)$$

ou encore

$$\int_{\eta_0}^{\eta_1} \left(Q(\xi_1, \eta) - \frac{\partial s(\xi_1, \eta)}{\partial \eta} \right) d\eta,$$

intégrale qui s'évanouit d'après l'équation (13).

2. Soient maintenant (ξ_0, η_0) et (ξ, η) deux points quelconques à l'intérieur du domaine S , on pourra intercaler d'une infinité de manières des points en nombre fini

$$(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots, (\xi_{n-1}, \eta_{n-1})$$

appartenant également à S et tels que pour deux points consécutifs $(\xi_{\lambda-1}, \eta_{\lambda-1})$ et $(\xi_{\lambda}, \eta_{\lambda})$ (ou $\xi_n = \xi, \eta_n = \eta$) ou la marche supérieure ou la marche inférieure, joignant ces deux points, se trouve entièrement à l'intérieur de S . Suivant le cas qui se présente désignons par ν_{λ} ou l'expression

$$(15) \quad \int_{\eta_{\lambda-1}}^{\eta_{\lambda}} Q(\xi_{\lambda-1}, \eta) d\eta + \int_{\xi_{\lambda-1}}^{\xi_{\lambda}} P(\xi, \eta_{\lambda}) d\xi$$

ou l'expression

$$(15 a) \quad \int_{\xi_{\lambda-1}}^{\xi_{\lambda}} P(\xi, \eta_{\lambda-1}) d\xi + \int_{\eta_{\lambda-1}}^{\eta_{\lambda}} Q(\xi_{\lambda}, \eta) d\eta ;$$

si toutes les deux marches étaient situées à l'intérieur de S , les deux expressions (15) et (15a) seraient identiques d'après le théorème (7). La somme

$$(16) \quad \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n$$

représente alors une fonction de ξ, η , satisfaisant à l'équation différentielle (2) et s'évanouissant pour ξ_0, η_0 . Pour démontrer que cette fonction est uniforme à l'intérieur de S , il suffit de faire voir qu'elle est indépendante du choix des points intercalés.

Soit donc

$$(14 a) \quad (\xi'_1, \eta'_1), \dots, (\xi'_{m-1}, \eta'_{m-1})$$

une autre série de points intercalés, et

$$(16 a) \quad \nu'_1 + \nu'_2 + \dots + \nu'_m$$

la somme des intégrales correspondantes; les séries (14) et (14a) vont déterminer deux *escaliers*, joignant les points (ξ_0, η_0) et (ξ, η) et situés entièrement à l'intérieur de S . L'aire limitée par eux pourra évidemment être partagée en un nombre fini de rectangles, tels que $(AB CD)$; en appliquant donc le théorème (7) sur chacun de ces rectangles, on démontrera immédiatement l'identité des sommes (16), (16a).

La somme (16) fournit la solution u de l'équation différentielle (2), dont nous nous sommes proposés de démontrer l'existence; elle sera représentée par le symbole

$$u = S \int_{(\xi_0, \eta_0)}^{(\xi, \eta)} (P d\xi + Q d\eta)^1 .$$

¹ Le principe de la définition de l'intégrale (17) indiqué dans le n° 2, a été imaginé à peu près en même temps par mon ami HEFFTER et par moi (voir la communication de M. HEFFTER, *Göttinger Nachrichten*, 1904, p. 196). Pour moi les considérations de la note pré-

3. Pour passer encore à l'application des résultats obtenus à la démonstration des théorèmes fondamentaux relatifs aux intégrales curvilignes, soit C une courbe menée dans l'intérieur de S entre les points (ξ_1, η_1) , (ξ_2, η_2) et représentée par les équations

$$\xi = \varphi(t), \quad \eta = \psi(t),$$

$\varphi(t)$, $\psi(t)$ étant deux fonctions uniformes du paramètre t , et admettant des dérivées $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ continues dans l'intervalle $t_1 \dots t_2$, où

$$\xi_i = \varphi(t_i), \quad \eta_i = \psi(t_i) \quad (i = 1, 2)^1.$$

Alors l'intégrale curviligne prise suivant C n'est autre chose que

$$(18) \quad \int_C (P d\xi + Q d\eta) = \int_{t_1}^{t_2} (P \cdot \varphi'(t) + Q \cdot \psi'(t)) dt.$$

Comme la fonction uniforme $u(\xi, \eta)$, donnée par l'expression (17) satisfait à l'équation différentielle (2), on a

$$P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) = \frac{du(\varphi(t), \psi(t))}{dt},$$

donc

$$\begin{aligned} \int_C (P d\xi + Q d\eta) &= u(\varphi(t_2), \psi(t_2)) - u(\varphi(t_1), \psi(t_1)) \\ &= u(\xi_2, \eta_2) - u(\xi_1, \eta_1). \end{aligned}$$

ce qui montre que l'intégrale (18) est indépendante du chemin d'intégration C , et que partant l'intégrale relative à une courbe

sente ne forment qu'une application très particulière des développements analogues que j'ai établis relativement aux solutions des systèmes d'équations différentielles linéaires, et qui seront publiés ailleurs.

¹ On sait d'après les travaux de MM. GOURSAT, *Transactions of the American Math. Soc.*, I (1900), MOORE, *ibid.*, PRINGSHEIM, *ibid.*, II (1904), HEFFTER, *Gött. Nachrichten*, 1902, 1903, 1904, que la définition de l'intégrale curviligne peut être donnée pour des courbes d'un caractère beaucoup plus général, mais comme pour la plupart des applications analytiques la définition adoptée dans le texte est assez générale, elle suffira pour les buts de l'enseignement, et c'est à quoi nous nous restreignons dans cette note.

fermée se réduit à zéro ¹. Le passage aux théorèmes de CAUCHY, relatifs aux intégrales de fonctions monogènes, se fait maintenant de la manière usuelle.

Remarquons enfin que les considérations du n° I s'étendent sans difficulté aux intégrales multiples, aussi bien que celles du n° II, aux intégrales des différentielles exactes, à un nombre quelconque de variables indépendantes.

Kolozsvar, 18 décembre 1904.

L. SCHLESINGER.

SUR UNE MANIÈRE
D'EXPOSER LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

1. On sait que von STAUDT exposa, indépendamment de toute notion de distance, les principes de la Géométrie projective.

Son exposition est fondée sur les propriétés du quadrilatère complet. Je vais ici exposer la Géométrie projective d'une façon différente et que je crois plus simple. Je ne me servirai pas du quadrilatère complet.

J'admettrai les axiomes ordinaires concernant le point, la ligne droite, le plan.

On regardera deux droites situées dans un même plan comme se coupant toujours. Si le point d'intersection n'existe pas en réalité, on dira que les droites se coupent en un point fictif, ou idéal. Il sera toujours possible de projeter les droites sur un autre plan (en projection conique) de façon que leurs projections se coupent. Trois droites d'un plan se couperont en un même point idéal, si leurs projections se coupent en un même point réel.

¹ C. f. HEFFTER, *l. c.*, 1903, p. 123.