

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 7 (1905)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES GROUPES MÉTRIQUES  
**Autor:** Combebiac, G.  
**Kapitel:** I. – TRANSFORMATIONS PONCTUELLES  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-8437>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

définitifs consacrés par Sophus Lie<sup>1</sup> à cette question dans sa Théorie des Groupes de Transformation. Il ne paraît donc pas sans intérêt d'édifier une théorie de la Métrique en adoptant le même point de vue que les analystes, mais en proscrivant tout appel à l'Analyse mathématique, c'est-à-dire en remplaçant le raisonnement *numérique* par le raisonnement *géométrique*. C'est l'objet que nous nous sommes proposé dans les pages suivantes.

Nous émettrons aussi, à titre de conclusions, quelques considérations concernant l'aspect sous lequel se présente dorénavant la Géométrie.

Nous montrerons enfin, dans un second article, que les théorèmes qui auront été ainsi établis comprennent un ensemble de propositions déjà reconnues susceptibles de constituer une base logique suffisante pour l'édification de la Métrique.

La lecture de ce Mémoire n'exige aucune *connaissance* mathématique.

#### I. — TRANSFORMATIONS PONCTUELLES

Une *transformation ponctuelle* d'une figure est une opération par laquelle tout point de la figure est transformé en un autre point de l'espace.

Lorsqu'une telle transformation est définie pour tout point de l'espace indépendamment des figures auxquelles il peut appartenir, elle est appelée *transformation ponctuelle de l'espace* ou simplement *transformation ponctuelle*<sup>2</sup>.

On ne considérera que des transformations ponctuelles telles que les transformés des points d'une ligne quelconque constituent également une ligne et que les transformés de deux points infiniment voisins soient aussi infiniment voisins.

Soit deux transformations ponctuelles S et S' définies pour tous les points de l'espace. A tout point quelconque M la

<sup>1</sup> SOPHUS LIE, *Theorie der Transformationsgruppen*, 3<sup>er</sup> Abschnitt, p. 393 à 543 ; Teubner, Leipzig.

<sup>2</sup> Une transformation ponctuelle est en somme une *fonction ponctuelle de point*.

transformation  $S$  fait correspondre un point  $M'$ , et l'application de  $S'$  à ce dernier point donnera un troisième point  $M''$ . On a ainsi déterminé, par l'application successive des deux transformations  $S$  et  $S'$ , une nouvelle transformation faisant correspondre à un point quelconque  $M$  un point  $M''$ . On posera :

$$M'' = S'(M') = S'[S(M)] = S'S(M) ,$$

et la transformation  $S'S$  sera appelée le *produit* de  $S$  et  $S'$ .

Soit trois transformations  $S, S', S''$ . La transformation  $S'S$  fait correspondre à un point quelconque  $M$  un point  $M''$ ; en appliquant à ce dernier la transformation  $S''$ , on obtient un nouveau point  $M'''$ , de sorte que la transformation  $S''(S'S)$  fait correspondre au point  $M$  le point  $M'''$ . La transformation  $S''S'$  fait évidemment correspondre au point  $M'$  le point  $M'''$ , et par suite, en appliquant cette transformation  $S''S'$  à la suite de  $S$ , on voit que la transformation  $(S''S')S$  fait correspondre au point  $M$  le point  $M'''$ , on a donc :

$$S''(S'S) = (S''S')S ,$$

c'est-à-dire que le produit  $S''S'S$  a une signification précise sans qu'il soit besoin d'employer de parenthèse.

Si une transformation  $S$  fait correspondre à un point quelconque  $M$  un point  $M'$  de telle sorte que, lorsque le point  $M$  parcourt l'espace, il en soit de même de  $M'$ , on voit qu'à tout point  $M'$  de l'espace correspond ainsi un point  $M$ ; la transformation ainsi définie est dite l'inverse de la première et est désignée par  $S^{-1}$ , c'est-à-dire que l'on pose :

$$S^{-1}S(M) = SS^{-1}(M) = M .$$

Soit une transformation ponctuelle :

$$M' = S(M) .$$

Par l'application d'une autre transformation  $T$  à tous les points de l'espace, on aura :

$$P = T(M) , \quad P' = T(M') ,$$

et la transformation  $S$  est changée elle-même en la transformation qui fait correspondre le point  $P'$  au point  $P$ .

Cette dernière transformation a pour expression :

$$TST^{-1},$$

ainsi qu'on le voit facilement en éliminant  $M$  et  $M'$  des relations précédentes, ou encore en observant que  $P$  est le transformé par  $T$  de  $T^{-1}(P)$ , dont le transformé par  $S$  est  $ST^{-1}(P)$ , lequel devient enfin  $TST^{-1}(P)$ .

Si l'on a :

$$TST^{-1} = S,$$

la transformation  $T$  laisse *invariante* la transformation  $S$ , et l'on dit que  $S$  *admet*  $T$ .

La relation précédente peut s'écrire :

$$TS = ST.$$

On voit sous cette forme qu'elle est réciproque et qu'elle est équivalente à la commutativité des deux transformations.

Lorsqu'une transformation fait correspondre à un point déterminé ou bien à tout point d'une ligne ou d'une surface le même point ou bien un point appartenant également à cette ligne ou à cette surface, on dit qu'elle laisse ce point ou bien cette ligne ou cette surface *invariantes* ou encore que ceux-ci *admettent* la transformation.

*Un point, une ligne, ou une surface qui admettent deux transformations, admettent aussi leur produit.*

En effet, si  $S$  et  $S'$  désignent les deux transformations et  $M$  le point invariant ou bien un point quelconque de la ligne ou de la surface invariantes,  $S'M$  coïncide avec le point invariant ou bien appartient à la ligne ou à la surface, et il en est par suite de même du point  $S'[S'M]$  ou  $S'S(M)$ : la transformation  $S'S$  possède donc bien la propriété énoncée.

La proposition précédente peut évidemment être énoncée sous la forme suivante :

*Une figure qui admet deux transformations admet aussi leur produit.*

On peut encore énoncer la proposition suivante :

*Si une figure  $F$  est transformée en une figure  $F'$  par chacune des transformations  $S$  et  $S'$ , la figure  $F$  admet les trans-*

*formations  $S'^{-1}S$  et  $S^{-1}S'$ , et la figure  $F'$ , les transformations  $SS'^{-1}$  et  $S'S^{-1}$ .*

On a en effet :

$$\begin{aligned} S'^{-1}S(F) &= S'^{-1}(F') = F, & S^{-1}S'(F) &= S^{-1}(F') = F; \\ SS'^{-1}(F') &= S(F) = F', & S'S^{-1}(F') &= S'(F) = F'. \end{aligned}$$

Un ensemble de transformations ponctuelles est dit *continu* lorsque  $S_1$  et  $S_2$  désignant deux transformations de cet ensemble,  $M_1$  et  $M_2$  les transformés par ces transformations d'un point quelconque  $M_0$ , il est toujours possible de réunir les points  $M_1$  et  $M_2$  par une ligne telle qu'il existe, dans l'ensemble considéré, une transformation faisant correspondre au point  $M_1$  un point quelconque de cette ligne.

DÉFINITION 1. — Un ensemble de transformations qui comprend le produit de deux quelconques d'entre elles s'appelle un *groupe* de transformations.

Nous nous proposons d'établir quelques propriétés des *Groupes continus comprenant les inverses de toutes leurs transformations*. Nous nous dispenserons le plus souvent de répéter ce qualificatif, qui sera toujours sous-entendu.

DÉFINITION 2. — Une figure  $F$  sera dite *congruente* à une figure  $F'$  par rapport à un groupe lorsque celui-ci contient une transformation  $S$  telle que l'on ait :

$$F' = S(F).$$

La congruence par rapport à un groupe contenant les inverses de ses transformations constitue évidemment une relation réciproque. On pourra donc parler de la *congruence de deux figures*.

Un groupe comprenant les inverses de toutes ses transformations comprend la transformation identique, car celle-ci peut toujours s'écrire  $SS^{-1}$ , quelle que soit  $S$ .

Il résulte de là que, par rapport aux groupes que nous considérons, *une figure est toujours congruente à elle-même*.

THÉORÈME 1. — *Les transformées par un groupe d'une figure déterminée (qui peut, en particulier, consister en un seul point) constituent le même ensemble que les transformées de l'une quelconque de ces transformées.*

En effet, si  $F_0$  désigne une figure et  $F$  l'une quelconque de ses transformées, le groupe comprend une transformation  $S$  telle que l'on a :

$$F = S(F_0) ,$$

et l'on aura, par l'application d'une transformation quelconque  $S'$  du groupe,

$$S'(F) = S'S(F_0) .$$

La transformation  $S'S$  appartenant au groupe, cette relation exprime que toute transformée  $S'(F)$  de  $F$  est aussi une transformée de  $F_0$  et par suite fait partie de l'ensemble de ces transformés; la réciproque est également vraie, car  $F_0$  est une transformée de  $F$ , puisque  $S^{-1}$  appartient au groupe.

**COROLLAIRE.** — *Deux figures congrueutes à une troisième sont congruentes entre elles.*

Car, si  $F$  et  $F'$  sont parmi les transformées de  $F_0$ ,  $F'$  doit, en vertu du théorème 1, se trouver parmi les transformées de  $F$ , c'est-à-dire lui être congruente.

**THÉORÈME 2.** — *Si  $S$  est le symbole de toutes les transformations d'un groupe laissant invariante une figure  $F$  et si  $T$  désigne une transformation déterminée du groupe transformant  $F$  en  $F'$ , l'expression générale des transformations  $T'$  du groupe par lesquelles  $F$  est transformée en  $F'$  est  $TS$ , et l'expression générale des transformations  $S'$  du groupe admises par  $F'$  est  $TST^{-1}$ .*

En effet,  $T$  et  $T'$  étant deux transformations transformant  $F$  en  $F'$ , on a vu que  $F$  admet  $T^{-1}T'$ , c'est-à-dire que cette transformation figure parmi les transformations dont le symbole est  $S$ ; autrement dit, il existe une transformation  $S$  telle que l'on a :

$$T^{-1}T' = S$$

ou

$$T' = TS .$$

En second lieu, si  $S'$  est le symbole des transformations laissant  $F'$  invariante, il résulte de la partie déjà démontrée du théorème que l'expression générale des transformations transformant  $F'$  en  $F$  est :

$$T'^{-1} = T^{-1}S' .$$

D'où :

$$S' = TT'^{-1} = TS^{-1}T^{-1},$$

ou enfin, comme les symboles  $S$  et  $S^{-1}$  correspondent au même ensemble de transformations,

$$S' = TST^{-1}.$$

**THÉORÈME 3.** — *Les transformations d'un groupe qui laissent invariante une figure déterminée forment elles-mêmes un groupe.*

On a vu qu'une figure qui admet deux transformations  $S$  et  $S'$  admet également leur produit  $SS'$ ; d'autre part, tout groupe qui comprend  $S$  et  $S'$  comprend aussi  $SS'$ ; ce produit  $SS'$  appartient donc à l'ensemble des transformations définies dans l'énoncé, c'est-à-dire que cet ensemble constitue un groupe, Q. e. d.

## II. — GROUPES MÉTRIQUES

Sophus Lie a résolu le problème suivant :

*Déterminer tous les ensembles de transformation ponctuelles jouissant des propriétés suivantes :*

M I. — *L'ensemble constitue un groupe continu comprenant les inverses de toutes ses transformations.*

M II. — *Si l'on fixe un point quelconque, le lieu des transformés d'un autre point quelconque est une surface contenant le second point et ne contenant pas le premier.*

M III. — *Il existe un volume  $N$  tel que, si l'on fixe un point quelconque à l'intérieur de ce volume, tout point de l'espace peut atteindre par un trajet continu tout point situé sur la surface correspondante.*

(Nous avons cru devoir adopter — à bon droit, croyons-nous, — pour l'axiome M III, un énoncé un peu différent de celui de Sophus Lie, lequel est ainsi libellé : si l'on fixe un point, il existe, autour de ce point, un volume tel que tout point pris à l'intérieur de ce volume peut atteindre, etc.)

L'illustre géomètre a démontré que ces propriétés suffisent à définir exactement les groupes qui servent à édifier les diverses métriques. Il doit donc être possible d'établir une