Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 6 (1904)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UNE FORMULE TRIGONOMÉTRIQUE D'INTERPOLATION

Autor: Gomes Teixeira, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7559

SUR UNE FORMULE TRIGONOMÉTRIQUE D'INTERPOLATION

1. Nous allons nous occuper dans cette Note de la question suivante:

Déterminer la fonction entière et homogène de $\sin x$ *et* $\cos x$, *de plus petit degré, qui prend, elle et ses dérivées, par rapport à* x, *les valeurs*

$$\begin{array}{l} y_1\,,\ y_1'\,,\ y_1''\,,\ \dots\,,\ y_1^{(\alpha-1)}\,,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ y_i\,,\ y_i'\,,\ y_i''\,,\ \dots\,,\ y_i^{(\beta-1)}\,,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ y_k\,,\ y_k'\,,\ y_k''\,,\ \dots\,,\ y_k^{(\lambda-1)}\,,\end{array}$$

quand on donne à x, *les valeurs* $x_1, x_2, \dots, x_k$.

Nous avons étudié déjà ce problème dans un article publié en 1885 aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3me série, t. IV); mais nous allons le résoudre ici par une analyse plus simple, au moyen d'une représentation des fonctions entières et homogènes de $\sin x$ et $\cos x$, qui donne immédiatement sa solution.

Je partirai, pour cela, de la fraction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$:

$$\frac{f(\sin x\,,\ \cos x)}{\sin^{\alpha}(x-x_1)\dots\sin^{\beta}(x-x_i)\dots\sin^{\lambda}(x-x_k)}\,,$$

où $f(\sin x, \cos x)$ représente une fonction entière et homogène de $\sin x$ et $\cos x$ du degré $\alpha+\dots+\beta+\dots+\lambda-1$, et, en posant

$$f(\sin x\,,\ \cos x)=\cos^m x\,\mathrm{F}(\operatorname{tang} x)\,,$$

$$m=\alpha+\dots+\beta+\dots+\lambda-1\,,$$

je l'écrirai de la manière suivante :

$$\frac{F(\tang x)}{\omega \cos x (\tang x - \tang x_1)^{\alpha} \dots (\tang x - \tang x_i)^{\beta} \dots (\tang x - \tang x_k)^{\lambda}}$$

où

$$\omega = \cos^{\alpha} x_1 \dots \cos^{\beta} x_i \dots \cos^{\lambda} x_k .$$

Ensuite je considère la fonction rationnelle de $\tang x$

$$\frac{F(\tang x)}{F_1(\tang x)},$$

où

$$F_1(\tang x) = (\tang x - \tang x_1)^{\alpha} \dots (\tang x - \tang x_i)^{\beta} \dots (\tang x - \tang x_k)^{\lambda},$$

et je la décompose en fractions simples ; ce qui donne

$$\frac{F(\tang x)}{F_1(\tang x)} = \sum_{i=1}^{i=k} \left[\frac{M_1^{(i)}}{\tang x - \tang x_i} + \frac{M_2^{(i)}}{(\tang x - \tang x_i)^2} + \dots + \frac{M_{\beta}^{(i)}}{(\tang x - \tang x_i)^{\beta}} \right];$$

où $M_1^{(i)}, M_2^{(i)}, \dots, M_{\beta}^{(i)}$ représentent des constantes qui coïncident avec les coefficients de $h^{\beta-1}, h^{\beta-2}, \dots, h^0$ dans le développement de

$$\frac{h^{\beta} F(\tang x_i + h)}{F_1(\tang x_i + h)};$$

et par conséquent

$$\frac{F(\tang x)}{F_1(\tang x)} = \sum_{i=1}^{i=k} \left[\frac{M_1^{(i)} \cos x_i \cos x}{\sin(x - x_i)} + \frac{M_2^{(i)} \cos^2 x_i \cos^2 x}{\sin^2(x - x_i)} + \dots + \frac{M_{\beta}^{(i)} \cos^{\beta} x_i \cos^{\beta} x}{\sin^{\beta}(x - x_i)} \right].$$

Mais d'un autre côté, si l'on décompose en des fractions simples la fraction $\frac{1}{F_1(\tang x)}$ et si l'on représente par

$A_1, A_2, \ldots, A_\alpha; \ldots, B_1, B_2, \ldots, B_\beta; \ldots$ les numérateurs de ces fractions, on trouve

$$\frac{F(\operatorname{tang} x)}{F_1(\operatorname{tang} x)} = \frac{A_1 F(\operatorname{tang} x)}{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_1} + \frac{A_2 F(\operatorname{tang} x)}{(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_1)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha F(\operatorname{tang} x)}{(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_1)^\alpha}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{B_1 F(\operatorname{tang} x)}{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i} + \frac{B_2 F(\operatorname{tang} x)}{(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i)^2} + \ldots + \frac{B_\beta F(\operatorname{tang} x)}{(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i)^\beta}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{P_1(\operatorname{tang} x)}{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_k} + \frac{P_2 F(\operatorname{tang} x)}{(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_k)^2} + \ldots + \frac{P_\lambda F(\operatorname{tang} x)}{(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_k)^\lambda},$$

et, par conséquent, en posant $\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} x_i + h$,

$$\frac{h^\beta F(\operatorname{tang} x_i + h)}{F_1(\operatorname{tang} x_i + h)} = B_1 \left[h^{\beta-1} F(\operatorname{tang} x_i) + h^\beta F'(\operatorname{tang} x_i) + \ldots \right]$$
$$+ B_2 \left[h^{\beta-2} F(\operatorname{tang} x_i) + h^{\beta-1} F'(\operatorname{tang} x_i) + \frac{1}{2} h^\beta F''(\operatorname{tang} x_i) + \ldots \right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ B_\beta \left[F(\operatorname{tang} x_i) + h F'(\operatorname{tang} x_i) + \ldots + \frac{h^{\beta-1}}{(\beta-1)!} F^{\beta-1}(\operatorname{tang} x_i) + \ldots \right]$$
$$+ R h^\beta,$$

où Rh^β représente la partie du développement considéré qui provient des fractions

$$\frac{A_1 h^\beta F(\operatorname{tang} x_i + h)}{\operatorname{tang} x_i + h - \operatorname{tang} x_1}, \quad \frac{A_2 h^\beta F(\operatorname{tang} x + h)}{(\operatorname{tang} x_i + h - \operatorname{tang} x_1)^2}, \quad \text{etc.}$$

On a donc

$$M_1^{(i)} = B_1 F(\operatorname{tang} x_i) + B_2 F'(\operatorname{tang} x_i) + \ldots + \frac{B_\beta}{(\beta-1)!} F^{(\beta-1)}(\operatorname{tang} x_i),$$
$$M_2^{(i)} = B_2 F(\operatorname{tang} x_i) + B_3 F'(\operatorname{tang} x_i) + \ldots + \frac{B_\beta}{(\beta-2)!} F^{(\beta-2)}(\operatorname{tang} x_i),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$M_\beta^{(i)} = B_\beta F(\operatorname{tang} x_i),$$

où $F'(\text{tang}\, x_i)$, $F''(\text{tang}\, x_i)$, ... représentent les valeurs que les dérivées $F'(t)$, $F''(t)$, ... de $F(t)$ prennent, quand on y pose $t = \text{tang}\, x_i$.

De ces formules et de la suivante :

$$\frac{f(\sin x\,,\ \cos x)}{\sin^{\alpha}(x - x_1) \ldots \sin^{\beta}(x - x_i) \ldots \sin^{\lambda}(x - x_k)} = \frac{F(\text{tang}\, x)}{\omega \cos x F_1(\text{tang}\, x)}\ ,$$

il résulte la suivante :

$$\begin{aligned} & f(\sin x\,,\ \cos x) \\ & = \frac{\varphi(x)}{\omega} \sum_{i=1}^{i=k} \left\{ \left[\frac{B_1 \cos x_i}{\sin(x - x_i)} + \frac{B_2 \cos^2 x_i \cos x}{\sin^2(x - x_i)} + \ldots + \right.\right. \\ & \qquad \left. \frac{B_\beta \cos^\beta x_i \cos^{\beta-1} x}{\sin^\beta(x - x_i)} \right] F(\text{tang}\, x_i) \\ & + \left[\frac{B_2 \cos x_i}{\sin(x - x_i)} + \frac{B_3 \cos^2 x_i \cos x}{\sin^2(x - x_i)} + \ldots + \frac{B_\beta \cos^{\beta-1} x \cos^{\beta-2} x}{\sin^{\beta-1}(x - x_i)} \right] F'(\text{tang}\, x_i) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \left. + \frac{1}{(\beta - 1)!} \cdot \frac{B_\beta \cos x_i}{\sin(x - x_i)}\ F^{(\beta-1)}(\text{tang}\, x_i) \right\}\ , \end{aligned}$$

où

$$\varphi(x) = \sin^{\alpha}(x - x_1) \ldots \sin^{\beta}(x - x_i) \ldots \sin^{\lambda}(x - x_k)\ ,$$

qui est celle que nous proposions d'obtenir.

Au moyen de cette formule on peut résoudre immédiatement le problème antérieurement énoncé.

En effet, l'équation

$$f(\sin x\ ,\ \cos x) = \cos^m x F(\text{tang}\, x)$$

et celles qui résultent de sa dérivation par rapport à x déterminent les quantités

$$F(\text{tang}\, x_i)\ ,\ F'(\text{tang}\, x_i)\ ,\ F''(\text{tang}\, x_i)\ , \ldots\ ,$$

quand sont données les quantités

$$f(\sin x_i\ ,\ \cos x_i),\ f'_x(\sin x_i\ ,\ \cos x_i)\ ,\ f''_{xx}(\sin x_i,\ \cos x_i)\ , \ldots .$$

2. — Voici encore un autre problème qu'on peut résoudre au moyen de la formule qu'on vient de trouver, en remarquant que l'expression qu'elle donne pour $f(\sin x, \cos x)$ peut être réduite premièrement à la forme

$$\begin{aligned} f(\sin x\ ,\ \cos x) &= \mathrm{K}_m \cos^m x + \mathrm{K}_{m-2} \cos^{m-2} x + \ldots \\ &+ \sin x [\mathrm{L}_{m-1} \cos^{m-1} x + \mathrm{L}_{m-3} \cos^{m-3} x + \ldots]\ , \end{aligned}$$

et qu'ensuite, au moyen des égalités connues

$$2^{a-1} \cos^a x = \cos ax + \binom{a}{1} \cos(a-2)x + \binom{a}{2} \cos(a-4)x + \ldots + \frac{1}{2}\binom{a}{\frac{1}{2}a}$$

si a est un entier pair, et

$$2^{a-1} \cos^a x = \cos ax + \binom{a}{1} \cos(a-2)x + \binom{a}{2} \cos(a-4)x + \ldots + \binom{a}{\frac{1}{2}(a-1)} \cos x,$$

si a est un entier impair, elle peut être réduite à la forme suivante :

$$(2) \left\{ \begin{aligned} f(\sin x\ ,\ \cos x) &= \mathrm{R}_m \cos mx + \mathrm{R}_{m-2} \cos(m-2)x + \ldots + \mathrm{R}_1 \cos x \\ &+ \mathrm{S}_m \sin mx + \mathrm{S}_{m-2} \sin(m-2)x + \ldots + \mathrm{S}_1 \sin x\ , \end{aligned} \right.$$

quand m est *impair*, et à la suivante :

$$(3) \left\{ \begin{aligned} f(\sin x\ ,\ \cos x) &= \mathrm{R}_m \cos mx + \mathrm{R}_{m-2} \cos(m-2)x + \ldots + \mathrm{R}_0 \\ &+ \mathrm{S}_m \sin mx + \mathrm{S}_{m-2} \sin(m-2)x + \ldots + \mathrm{S}_2 \sin 2x\ , \end{aligned} \right.$$

quand m est pair.

On peut donc résoudre, au moyen de la formule (1), le problème qui a pour but de chercher les coefficients qui entrent dans une des expressions (2) ou (3), quand sont données les valeurs qu'elle et ses dérivées prennent aux points x_1, x_2, ..., x_k, en déterminant premièrement, au moyen de ces valeurs et de la formule (1), la fonction $f(\sin x, \cos x)$, et en la réduisant ensuite à une des formes (2) ou (3).

F. Gomes Teixeira (Porto).