SUR UNE FORMULE TRIGONOMÉTRIQUE D'INTERPOLATION

1. Nous allons nous occuper dans cette Note de la question suivante:

Déterminer la fonction entière et homogène de $\sin x$ et $\cos x$, de plus petit degré, qui prend, elle et ses dérivées, par rapport à x, les valeurs

$$\begin{array}{l} y_1 , y_1' , y_1'' , \ldots , y_1^{(\alpha-1)} , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_i , y_i' , y_i'' , \ldots , y_i^{(\beta-1)} , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k , y_k' , y_k'' , \ldots , y_k^{(\lambda-1)} , \end{array}$$

quand on donne à x, les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Nous avons étudié déjà ce problème dans un article publié en 1885 aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3me série, t. IV); mais nous allons le résoudre ici par une analyse plus simple, au moyen d'une représentation des fonctions entières et homogènes de $\sin x$ et $\cos x$, qui donne immédiatement sa solution.

Je partirai, pour cela, de la fraction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$:

$$\frac{f(\sin x , \cos x)}{\sin^\alpha (x-x_1)\ldots\sin^\beta(x-x_i)\ldots\sin^\lambda(x-x_k)},$$

où $f(\sin x, \cos x)$ représente une fonction entière et homogène de $\sin x$ et $\cos x$ du degré $\alpha+\ldots+\beta+\ldots+\lambda-1$, et, en posant

$$f(\sin x , \cos x) = \cos^m x \, \mathrm{F}(\operatorname{tang} x) ,$$
$$m = \alpha+\ldots+\beta+\ldots+\lambda-1 ,$$

je l'écrirai de la manière suivante :

$$\frac{F(\operatorname{tang} x)}{\omega \cos x (\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_1)^{\alpha} \ldots (\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i)^{\beta} \ldots (\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_k)^{\lambda}}$$

où

$$\omega = \cos^{\alpha} x_1 \ldots \cos^{\beta} x_i \ldots \cos^{\lambda} x_k .$$

Ensuite je considère la fonction rationnelle de $\operatorname{tang} x$

$$\frac{F(\operatorname{tang} x)}{F_1(\operatorname{tang} x)},$$

où

$$F_1(\operatorname{tang} x) = (\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_1)^{\alpha} \ldots (\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i)^{\beta} \ldots (\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_k)^{\lambda},$$

et je la décompose en fractions simples ; ce qui donne

$$\frac{F(\operatorname{tang} x)}{F_1(\operatorname{tang} x)} = \sum_{i=1}^{i=k} \left[\frac{M_1^{(i)}}{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i} + \frac{M_2^{(i)}}{(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i)^2} + \cdots + \frac{M_{\beta}^{(i)}}{(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x_i)^{\beta}} \right];$$

où $M_1^{(i)}, M_2^{(i)}, \ldots, M_{\beta}^{(i)}$ représentent des constantes qui coïncident avec les coefficients de $h^{\beta-1}, h^{\beta-2}, \ldots, h^0$ dans le développement de

$$\frac{h^{\beta} F(\operatorname{tang} x_i + h)}{F_1(\operatorname{tang} x_i + h)};$$

et par conséquent

$$\frac{F(\operatorname{tang} x)}{F_1(\operatorname{tang} x)} = \sum_{i=1}^{i=k} \left[\frac{M_1^{(i)} \cos x_i \cos x}{\sin(x - x_i)} + \frac{M_2^{(i)} \cos^2 x_i \cos^2 x}{\sin^2(x - x_i)} + \cdots + \frac{M_{\beta}^{(i)} \cos^{\beta} x_i \cos^{\beta} x}{\sin^{\beta}(x - x_i)} \right].$$

Mais d'un autre côté, si l'on décompose en des fractions simples la fraction $\dfrac{1}{F_1(\operatorname{tang} x)}$ et si l'on représente par

$A_1, A_2, \ldots, A_\alpha; \ldots, B_1, B_2, \ldots, B_\beta; \ldots$ les numérateurs de ces fractions, on trouve

$$\frac{F(\tang x)}{F_1(\tang x)} = \frac{A_1 F(\tang x)}{\tang x - \tang x_1} + \frac{A_2 F(\tang x)}{(\tang x - \tang x_1)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha F(\tang x)}{(\tang x - \tang x_1)^\alpha}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{B_1 F(\tang x)}{\tang x - \tang x_i} + \frac{B_2 F(\tang x)}{(\tang x - \tang x_i)^2} + \ldots + \frac{B_\beta F(\tang x)}{(\tang x - \tang x_i)^\beta}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{P_1(\tang x)}{\tang x - \tang x_k} + \frac{P_2 F(\tang x)}{(\tang x - \tang x_k)^2} + \ldots + \frac{P_\lambda F(\tang x)}{(\tang x - \tang x_k)^\lambda},$$

et, par conséquent, en posant $\tang x = \tang x_i + h$,

$$\frac{h^\beta F(\tang x_i + h)}{F_1(\tang x_i + h)} = B_1 \left[h^{\beta-1} F(\tang x_i) + h^\beta F'(\tang x_i) + \ldots \right]$$
$$+ B_2 \left[h^{\beta-2} F(\tang x_i) + h^{\beta-1} F'(\tang x_i) + \frac{1}{2} h^\beta F''(\tang x_i) + \ldots \right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ B_\beta \left[F(\tang x_i) + h F'(\tang x_i) + \ldots + \frac{h^{\beta-1}}{(\beta-1)!} F^{\beta-1}(\tang x_i) + \ldots \right]$$
$$+ R h^\beta,$$

où Rh^β représente la partie du développement considéré qui provient des fractions

$$\frac{A_1 h^\beta F(\tang x_i + h)}{\tang x_i + h - \tang x_1}, \quad \frac{A_2 h^\beta F(\tang x + h)}{(\tang x_i + h - \tang x_1)^2}, \quad \text{etc.}$$

On a donc

$$M_1^{(i)} = B_1 F(\tang x_i) + B_2 F'(\tang x_i) + \ldots + \frac{B_\beta}{(\beta-1)!} F^{(\beta-1)}(\tang x_i),$$
$$M_2^{(i)} = B_2 F(\tang x_i) + B_3 F'(\tang x_i) + \ldots + \frac{B_\beta}{(\beta-2)!} F^{(\beta-2)}(\tang x_i),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$M_\beta^{(i)} = B_\beta F(\tang x_i),$$

où $F'(\tan x_i)$, $F''(\tan x_i)$, ... représentent les valeurs que les dérivées $F'(t)$, $F''(t)$, ... de $F(t)$ prennent, quand on y pose $t = \tan x_i$.

De ces formules et de la suivante :

$$\frac{f(\sin x\,,\ \cos x)}{\sin^{\alpha}(x - x_1)\ldots\sin^{\beta}(x - x_i)\ldots\sin^{\lambda}(x - x_k)} = \frac{F(\tan x)}{\omega\cos x F_1(\tan x)}\ ,$$

il résulte la suivante :

$$\begin{aligned}
f(\sin x\,,\ \cos x) &= \frac{\varphi(x)}{\omega}\sum_{i=1}^{i=k}\Bigg\{\left[\frac{B_1\cos x_i}{\sin(x - x_i)} + \frac{B_2\cos^2 x_i\cos x}{\sin^2(x - x_i)} + \ldots + \frac{B_\beta\cos^\beta x_i\cos^{\beta-1}x}{\sin^\beta(x - x_i)}\right]F(\tan x_i)\\
&+\left[\frac{B_2\cos x_i}{\sin(x - x_i)} + \frac{B_3\cos^2 x_i\cos x}{\sin^2(x - x_i)} + \ldots + \frac{B_\beta\cos^{\beta-1}x\cos^{\beta-2}x}{\sin^{\beta-1}(x - x_i)}\right]F'(\tan x_i)\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\frac{1}{(\beta-1)!}\cdot\frac{B_\beta\cos x_i}{\sin(x - x_i)}F^{(\beta-1)}(\tan x_i)\Bigg\}\ ,
\end{aligned}$$

où

$$\varphi(x) = \sin^{\alpha}(x - x_1)\ldots\sin^{\beta}(x - x_i)\ldots\sin^{\lambda}(x - x_k)\ ,$$

qui est celle que nous proposions d'obtenir.

Au moyen de cette formule on peut résoudre immédiatement le problème antérieurement énoncé.

En effet, l'équation

$$f(\sin x\,,\ \cos x) = \cos^m x F(\tan x)$$

et celles qui résultent de sa dérivation par rapport à x déterminent les quantités

$$F(\tan x_i)\ ,\ F'(\tan x_i)\ ,\ F''(\tan x_i)\ ,\ \ldots\ ,$$

quand sont données les quantités

$$f(\sin x_i\,,\ \cos x_i),\ f'_x(\sin x_i\,,\ \cos x_i)\ ,\ f''_{xx}(\sin x_i\,,\ \cos x_i)\,,\ \ldots\ .$$

2. — Voici encore un autre problème qu'on peut résoudre au moyen de la formule qu'on vient de trouver, en remarquant que l'expression qu'elle donne pour $f(\sin x, \cos x)$ peut être réduite premièrement à la forme

$$\begin{aligned} f(\sin x\ ,\ \cos x) = {} & K_m \cos^m x + K_{m-2} \cos^{m-2} x + \dots \\ & + \sin x [L_{m-1} \cos^{m-1} x + L_{m-3} \cos^{m-3} x + \dots] \ , \end{aligned}$$

et qu'ensuite, au moyen des égalités connues

$$2^{a-1} \cos^a x = \cos ax + \binom{a}{1} \cos(a-2)x + \binom{a}{2} \cos(a-4)x + \dots + \frac{1}{2}\binom{a}{\frac{1}{2}a}$$

si a est un entier pair, et

$$2^{a-1} \cos^a x = \cos ax + \binom{a}{1} \cos(a-2)x + \binom{a}{2} \cos(a-4)x + \dots + \binom{a}{\frac{1}{2}(a-1)} \cos x,$$

si a est un entier impair, elle peut être réduite à la forme suivante :

$$(2) \left\{ \begin{aligned} f(\sin x\ ,\ \cos x) = {} & R_m \cos mx + R_{m-2} \cos(m-2)x + \dots + R_1 \cos x \\ & + S_m \sin mx + S_{m-2} \sin(m-2)x + \dots + S_1 \sin x \ , \end{aligned} \right.$$

quand m est *impair*, et à la suivante :

$$(3) \left\{ \begin{aligned} f(\sin x\ ,\ \cos x) = {} & R_m \cos mx + R_{m-2} \cos(m-2)x + \dots + R_0 \\ & + S_m \sin mx + S_{m-2} \sin(m-2)x + \dots + S_2 \sin 2x \ , \end{aligned} \right.$$

quand m est pair.

On peut donc résoudre, au moyen de la formule (1), le problème qui a pour but de chercher les coefficients qui entrent dans une des expressions (2) ou (3), quand sont données les valeurs qu'elle et ses dérivées prennent aux points x_1, x_2, ..., x_k, en déterminant premièrement, au moyen de ces valeurs et de la formule (1), la fonction $f(\sin x, \cos x)$, et en la réduisant ensuite à une des formes (2) ou (3).

F. GOMES TEIXEIRA (Porto).