

# III GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **6 (1904)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

RÉSUMÉ. — A l'*Analysis sitûs* ressortissent les propriétés relatives à un groupe de notions, qui se ramènent aux suivantes : point, continuité, ligne, surface, transformation ponctuelle, connexion.

### III

#### GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

AXIOMES PROJECTIFS. — On appelle *projectives* les transformations dans lesquelles toute ligne droite est transformée en une ligne droite.

Les propriétés projectives des figures sont, par définition, celles qui sont invariantes (conservées) dans toute transformation ponctuelle projective de l'espace.

L'ensemble de ces propriétés constitue la *Géométrie projective*.

Il est clair, d'après cela, que les propriétés projectives sont celles qui, en plus des notions constituant l'objet de l'*Analysis sitûs*, font intervenir la notion de ligne droite.

Quelle que soit l'origine de la notion de ligne droite, cette notion doit être considérée, en Géométrie projective, comme primordiale, c'est-à-dire qu'elle n'est pas susceptible d'une définition la ramenant à des éléments appartenant à ce domaine; autrement dit, elle doit être considérée comme donnée, ou bien acquise par un *processus* étranger.

On pourrait, il est vrai, prendre pour notion primordiale celle de transformation ponctuelle projective, mais elle ne s'impose pas assez directement à notre conception sensorielle.

A défaut de définition, il est nécessaire d'énoncer les propriétés fondamentales de la ligne droite qui, jointes aux axiomes AI et AII, doivent servir d'axiomes à la Géométrie projective.

Les axiomes projectifs sont au nombre de trois, savoir :

P I. — *Les lignes droites forment une famille de lignes continues, telles qu'une d'entre elles est déterminée par la condition de passer par deux points donnés.*

P II. — *Lorsque deux droites sont concourantes, deux autres droites respectivement concourantes avec chacune d'elles*

(sans que trois de ces droites soient concourantes ensemble) sont concourantes entre elles.

P III. — Par un point on ne peut mener qu'une droite asymptotique à une autre droite.

Ce dernier axiome, qui représente le *postulat des parallèles*, n'intervient pas dans les propriétés projectives, lorsqu'on se borne à leur signification analytique, en faisant abstraction des idées figurées qui leur correspondent. Nous ne le comprendrons parmi les axiomes projectifs que lorsque nous l'indiquerons expressément.

La condition pour qu'une ligne passe par un point donné s'exprime par deux équations.

L'axiome P I équivaut donc à ceci: que les droites forment une famille de lignes à quatre paramètres et que le système des quatre équations exprimant qu'une de ces lignes passe par deux points donnés a une solution unique.

L'axiome P II est la condition d'existence du plan, en ce qu'il permet de construire une famille à trois paramètres de surfaces, telles qu'une ligne droite qui a deux de ses points sur une de ces surfaces y est située tout entière.

Nous prenons ces axiomes *au sens analytique*, c'est-à-dire que, pour nous, la « condition de rencontre » de deux droites est la relation entre les paramètres de ces droites qui résulte de l'élimination des coordonnées entre leurs équations, étant admis que, lorsque la condition est remplie, les valeurs qui en résultent pour les coordonnées peuvent être impropres, par exemple imaginaires, si le système de coordonnées est univoque.

Cette généralisation de l'idée du concours de deux droites étend la portée des axiomes P I et P II — seuls axiomes projectifs proprement dits — à certaines familles de lignes qui n'y satisferaient pas sans cela. Il est facile de voir notamment que le second axiome, si on se bornait à sa signification *figurée*, ne pourrait être exact pour une famille de lignes ne satisfaisant pas à l'axiome de l'asymptotique unique. En outre, au sens analytique, plusieurs lignes asymptotiques entre elles sont concourantes.

Les axiomes P I et P II, même au sens analytique, repré-

sentent forcément des propriétés constructives; mais, celles-ci, lorsque le point de concours n'est pas réel, n'ont pas la simplicité nécessaire pour être introduites dans des axiomes.

Au lieu de prendre la ligne droite pour notion fondamentale de la Géométrie projective, on peut prendre le plan.

Les axiomes seraient alors :

(P I)'. — *Les plans forment une famille de surfaces, telles que l'une d'entre elles est déterminée par la condition de passer par trois points donnés.*

(P II)'. — *Trois plans ayant en commun plus d'un point ont en commun tous les points qui appartiennent à la fois à deux d'entre eux.*

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer l'équivalence des deux couples d'axiomes, après avoir d'abord établi la genèse du plan par le mouvement d'une droite passant par un point donné et s'appuyant sur une droite donnée, et montré que, en vertu de P II, une droite ayant deux points dans un plan y est située tout entière.

LIGNES SATISFAISANT AUX AXIOMES PROJECTIFS. — Il est clair que les axiomes posés jusqu'ici, qui particularisent les droites et les plans (en tant que familles plutôt qu'en ce qui concerne leur forme), ne les déterminent nullement et qu'il existe des infinités de familles de lignes et de surfaces jouissant de ces mêmes propriétés, de sorte que les propositions de la Géométrie projective, lesquelles, comme nous le démontrerons, résultent entièrement des axiomes projectifs, sont applicables à des figures où les surfaces et les lignes choisies pour répondre aux termes de « plans » et de « droites » ne seraient nullement identiques aux surfaces et aux lignes désignées habituellement par ces noms.

Les conclusions d'un raisonnement s'étendent en effet partout où sont applicables les propriétés réellement mises en œuvre, et c'est pour cela qu'il est toujours très scientifique de dégager nettement ces propriétés. Ce qui fait la *généralité* des raisonnements analytiques, c'est qu'ils s'appuient uniquement sur des propriétés que possèdent, *par définition*, les éléments dont ils s'occupent.

Nous signalerons brièvement les particularités que peu-

vent présenter les familles de lignes satisfaisant aux axiomes P I et P II, sans toutefois nous écarter des cas les plus simples, la généralité nécessitant des développements dans lesquels nous ne pouvons entrer.

1° Les lignes considérées sont fermées.

La surface engendrée par une ligne fermée variable passant par un point et s'appuyant sur une autre ligne fermée ne peut être que fermée: les surfaces jouant le rôle des plans seront donc fermées.

Si une telle surface est à simple connexion, deux lignes fermées tracées sur elle se rencontrent en un nombre pair de points; l'axiome P I ne saurait donc être valable en toute rigueur. On peut toutefois en maintenir la portée essentielle en admettant que les points de l'espace soient associés deux à deux, de manière que, lorsque l'une des lignes considérées passe par un point, elle passe également par son associé. Une telle combinaison est réalisée par la famille à quatre paramètres constituée par les cercles ayant leur centre sur un plan donné. Les axiomes P I et P II seraient rigoureusement applicables, si l'on ne considérait que les points situés d'un même côté du plan donné; si ce plan est rejeté à l'infini, on retombe sur la Géométrie ordinaire.

Mais on peut aussi supposer que les lignes jouant le rôle des droites, tout en étant fermées, ne puissent avoir, deux à deux, plus d'un point commun. Il est alors nécessaire que les surfaces jouant le rôle des plans soient *doubles*, et, par suite, *a fortiori*, doublement connexes.

2° Les lignes considérées sont ouvertes et ne satisfont pas à l'axiome de l'asymptotique unique. Les surfaces jouant le rôle des plans peuvent être alors simplement connexes et doublement infinies, comme les plans eux-mêmes.

Admettons que l'on ait déterminé sur une de ces surfaces, que l'on peut, pour la facilité de la représentation visuelle, supposer être un plan, un système de coordonnées univoques, et soit

$$(1) \quad af(xy) + b\varphi(xy) + c = 0$$

l'équation générale des lignes considérées,  $f(xy) = 0$  et

$\varphi(xy) = 0$  étant respectivement les équations de deux d'entre elles, et  $a, b, c$ , des paramètres (homogènes).

Supposons en outre que le système d'équations en  $xy$  :

$$(2) \quad f(xy) = X, \quad \varphi(xy) = Y,$$

où  $X$  et  $Y$  sont des nombres réels donnés, n'ait jamais plus d'une solution composée de valeurs réelles de  $x$  et  $y$ , quelles que soient les valeurs attribuées à  $X$  et  $Y$ .

Moyennant ces conditions, la famille de lignes (1) se prêtera à une interprétation de la Géométrie projective plane, dans laquelle cette famille sera substituée à celle des lignes droites.

En faisant varier les fonctions  $f$  et  $\varphi$ , on obtiendra, pour ces lignes, des formes très différentes entre elles, ainsi que des particularités diverses dans leurs relations.

Laissant de côté le cas où les valeurs des fonctions  $f$  et  $\varphi$  ne sont pas toujours réelles pour tout système de valeurs des coordonnées  $x$  et  $y$ , cas où il existe des points par lesquels il ne passe aucune des lignes (1), nous nous bornerons à signaler plus spécialement un cas où, au contraire, les fonctions  $f$  et  $\varphi$  ne prennent pas tous les systèmes de valeurs réelles lorsque l'on donne successivement à  $x$  et  $y$  toutes les valeurs réelles possibles, le cas limite étant celui où la transformation ponctuelle que représentent les équations (2), lorsqu'on y regarde  $X$  et  $Y$  comme constituant un second couple de variables, est univoque.

Supposons, par exemple, que, quelles que soient  $x$  et  $y$ , les valeurs  $X$  et  $Y$  de  $f$  et  $\varphi$  satisfassent toujours à l'inégalité

$$(3) \quad X^2 + Y^2 < R^2,$$

de sorte que, pour tout système de valeurs de  $X$  et  $Y$  n'y satisfaisant pas, le système d'équation (2) n'ait pas de solution réelle en  $x$  et  $y$ .

Les coordonnées  $x$  et  $y$  du point commun à deux lignes, déterminées respectivement par les paramètres  $a, b, c$  et  $a', b', c'$  sont données par les formules

$$f(xy) = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}, \quad \varphi(xy) = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}.$$

Les valeurs correspondantes de  $x$  et  $y$  ne seront réelles que sous condition et en particulier elles ne le seront pas lorsque le dénominateur commun sera suffisamment grand.

Il est facile de voir que, par tout point de la surface, passent une infinité de lignes (1) ne rencontrant pas une autre de ces lignes donnée.

Les deux séries de lignes seront délimitées par deux d'entre elles qui seront asymptotiques à la ligne donnée.

C'est l'hypothèse de Lobatchewski sur les lignes droites.

Si, à la limite, on suppose que la transformation (2) soit univoque, les valeurs des coordonnées  $x$  et  $y$  ne seront infinies que dans le cas où l'on aura

$$ab' - ba' = 0,$$

et les deux asymptotiques susceptibles d'être menées par un point à une ligne donnée de la famille (1) se confondent toujours en une seule: c'est l'hypothèse euclidienne.

Il est d'ailleurs facile de former des fonctions  $f$  et  $\varphi$  dont les valeurs satisfassent à l'inégalité (3).

Considérons, pour cela, un cercle de rayon  $R$  ayant pour centre l'origine des coordonnées, et représentons le plan entier sur la région intérieure à ce cercle de la manière suivante :

A tout point  $M$  du plan faisons correspondre un point  $M'$  situé sur le même rayon et tel que les distances respectives  $r$  et  $r'$  des deux points au centre du cercle soient liées par la relation

$$r = R \log \frac{R + r'}{R - r'} \quad \text{ou} \quad r' = R \frac{e^{\frac{r}{R}} - 1}{e^{\frac{r}{R}} + 1}.$$

En désignant par  $x$  et  $y$  les coordonnées rectangulaires du point  $M$  et par  $X$  et  $Y$  celles du point  $M'$ , on aura

$$x = R \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \log \frac{R + \sqrt{X^2 + Y^2}}{R - \sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad y = R \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \log \frac{R + \sqrt{X^2 + Y^2}}{R - \sqrt{X^2 + Y^2}}$$

et

$$X = R \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{e^{\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}} - 1}{e^{\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}} + 1}, \quad Y = R \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{e^{\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}} - 1}{e^{\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}} + 1}$$

on a

$$X^2 + Y^2 = R^2 \left( \frac{e \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} - 1}{\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} + 1} \right)^2 < R^2$$

Il suffit donc de prendre, pour  $f(xy)$  et  $\varphi(xy)$ , les expressions ci-dessus de  $X$  et  $Y$ , pour que l'équation (1) soit l'équation de lignes jouissant des propriétés projectives des lignes droites dans le plan et telles que par un point on puisse mener à l'une d'elles deux asymptotiques.

3° Lignes ouvertes et satisfaisant à l'axiome de l'asymptotique unique.

Pour obtenir une famille de lignes satisfaisant, non seulement aux axiomes PI et PII, mais encore à l'axiome PIII, il suffit de considérer les transformées des lignes droites dans une transformation ponctuelle univoque, par exemple celle qui est définie de la manière suivante :  $x, y, z$ , étant les coordonnées d'un point, celles du transformé ont pour expressions

$$x' = \pm e^{(x)} - 1, \quad y' = \pm e^{(y)} - 1, \quad z' = \pm e^{(z)} - 1,$$

où  $(x), (y), (z)$  représentent les valeurs absolues de  $x, y, z$  et où les signes placés devant les exponentielles sont à choisir de manière que  $x', y', z'$  soient respectivement de même signe que  $x, y, z$ .

PORTÉE DU THÉORÈME DE DESARGUES. — Un théorème projectif important de Géométrie plane est le théorème de Desargues, qui peut être énoncé de la manière suivante :

THÉORÈME DE DESARGUES. — *Lorsque deux triangles situés dans un même plan sont tels que les trois droites joignant leurs sommets deux à deux sont concourantes, les côtés respectivement opposés aux dits sommets se coupent deux à deux sur une même droite, et réciproquement.*

Ce théorème résulte facilement de l'axiome PII, en regardant les deux triangles comme les projections, faites de deux points de vue différents, d'un même triangle de l'espace.

Les axiomes PI et PIII sont tout autant planaires que spatiaux.



Ils constituent, avec le théorème de Desargues, un groupe d'axiomes projectifs planaires, de sorte que le théorème de Desargues est le représentant, dans le plan, de l'axiome PII.

Ce fait important, mis en évidence sous une autre forme par M. Hilbert<sup>1</sup>, résulte des propositions que nous énoncerons sans démonstration (pour ne pas trop allonger cet article) au paragraphe suivant.

CALCUL SEGMENTAIRE DE M. HILBERT. — Pour la facilité du langage, nous appellerons « droites » des lignes constituant une famille satisfaisant aux axiomes PI et PII, mais il reste entendu qu'elles peuvent présenter les formes les plus diverses.

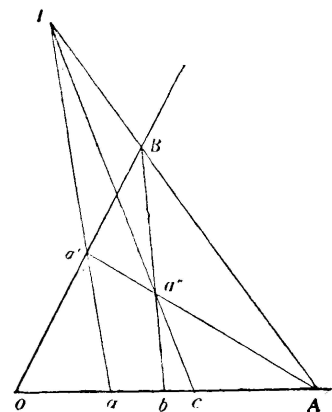
Nous allons établir un système de coordonnées sur une de ces lignes au moyen d'une construction exposée par M. Hilbert, dans laquelle toutefois nous remplacerons, en vue de la généralité et pour éviter l'hypothèse de l'asymptotique unique, la droite de l'infini par une droite quelconque. La construction ainsi généralisée ne perd d'ailleurs aucune de ses propriétés essentielles, lesquelles tiennent uniquement à l'axiome PI et au théorème de Desargues.

Nous supposerons seulement qu'on sache déterminer, dans le plan, le point de concours de deux droites ainsi que la droite joignant deux points, étant d'ailleurs observé que lorsqu'un des points n'est pas réel ou est rejeté à l'infini, le tracé est toujours possible par l'application du théorème de Desargues.

Sur la droite considérée  $DD'$ , prenons deux points  $O$  et  $A$ , traçons deux lignes droites passant l'une par  $O$ , l'autre par  $A$  et se coupant en  $B$ , et choisissons sur la ligne  $AB$  un point  $I$ .

Etant donnés deux points  $a$  et  $b$  de la droite  $DD'$  situés entre  $O$  et  $A$ , effectuons les constructions suivantes :

Déterminons  $a'$  par l'intersection de  $Ia$



<sup>1</sup> HILBERT, loc. cit.

et OB, puis  $a''$  par l'intersection de  $Aa'$  et  $Bb$ , enfin  $c$  par l'intersection de  $Ia''$  et  $DD'$ .

Désignons par le signe  $+$  l'opération que nous venons de définir par ces constructions, c'est-à-dire posons

$$a + b = c.$$

Cette opération jouit de propriétés importantes que l'on peut démontrer directement en s'appuyant soit sur l'axiome PII, soit sur le théorème de Desargues, qui le représente dans le plan.

On peut aussi déduire logiquement ces propriétés d'un certain nombre d'entr'elles, que nous exprimerons de la manière suivante, où nous représentons par  $o$  l'élément initial O, en raison de ses propriétés :

$$I \quad \left\{ \begin{array}{ll} a + b = x \text{ a toujours une et une seule solution en } x; & \\ (a + b) + c = a + (b + c), & a + o = a, \\ a + b > a, & a + b > b. \\ \text{lorsque } b > c, \quad \text{on a} & a + b > a + c. \end{array} \right.$$

Le signe  $>$  a pour objet d'exprimer l'ordre des éléments par rapport au sens de parcours de O vers A.

Appelons *opération additive* une opération  $+$  possédant les propriétés I et s'appliquant aux éléments d'un continu simplement étendu (ou à une dimension), ayant un élément initial représenté par 0 et pouvant soit se prolonger indéfiniment soit avoir un second élément extrême A.

Nous énoncerons, sans démonstration, quelques-unes des conséquences des propriétés I :

1°  $a + b = b + a$ , c'est-à-dire que l'opération additive, qui, par hypothèse, est associative, est en outre commutative ;

2° L'expression  $a + x$  représente une fonction croissante et continue de  $x$  ;

3° Lorsque  $b > a$ , il existe toujours un élément  $x$ , tel que

$$a + x = b ;$$

4° L'expression  $n.x$ , où  $n$  est un nombre entier, représente

une fonction continue et croissante de  $x$ ,  $n.x$  étant définie par la formule

$$n.x = \underbrace{x + x + \dots + x}_n ;$$

5° Il existe toujours, entre  $o$  et  $a$ , un élément  $x$ , tel que l'on a,  $n$  étant un nombre entier donné,

$$n.x = a, \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{n} ;$$

6° Il est dès lors possible de définir, au moyen de procédés calqués sur ceux de la numération, l'élément représenté par  $n.a$ ,  $n$  étant un nombre entier, fractionnaire ou incommensurable;

7° L'expression  $n.a$ , où  $a$  est un élément constant, représente une fonction continue et croissante du nombre  $n$ ;

8° L'élément  $n.a$ , lorsque  $n$  augmente indéfiniment (peu importe que ce soit par valeurs entières ou par variation continue), a pour limite l'élément extrême du continu, ce qui exprime : d'abord que l'opération dont le résultat est  $n.a$  est toujours possible (1<sup>re</sup> ligne des formules I), ensuite qu'elle permet de dépasser un élément quelconque.

Nous exprimerons la propriété 8° en disant que l'opération fondamentale envisagée (opération  $+$ ) est *archimédienne*, par allusion au principe d'Archimède, qui s'énonce ainsi :

*Si  $a$  et  $b$  désignent deux nombres quelconques, il est toujours possible d'ajouter  $a$  à lui-même un nombre de fois suffisant pour que la somme qui en résulte ait la propriété :*

$$a + a + \dots + a > b.$$

AXIOMES DU CONTINU LINÉAIRE. — Observons que les opérations qui jouissent des propriétés que nous venons de mentionner se définissent analytiquement avec beaucoup de facilité.

Faisons correspondre à tout élément du continu à une dimension considéré un nombre positif, la valeur  $o$  étant attribuée à l'élément initial et  $\infty$  à l'élément extrême. L'élément  $z$ , résultat de l'opération  $+$  effectuée sur les éléments  $x$  et  $y$ ,

devra être déterminé par une formule (algébrique cette fois) de la forme

$$(4) \quad f(z) = f(x) + f(y).$$

$f(x)$  étant une fonction de  $x$  positive, continue, croissante, uniforme et ayant, ainsi que son inverse, une détermination toujours réelle, cette dernière propriété ayant pour conséquence que  $f(x)$  croît indéfiniment avec  $x$ .

M. Hilbert<sup>1</sup> admet qu'il existe des opérations qui satisfont à toutes les conditions I, et qui ne possèdent ni la propriété commutative ni la propriété archimédienne, celle-ci entraînant d'ailleurs celle-là.

Le savant géomètre construit, dans ces conditions, une Géométrie plane *arguésienne* et *non-pascalienne*, dans laquelle certains théorèmes projectifs ne sont plus vrais, notamment le théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit dans une conique (limité au cas où la conique est réduite à deux droites).

Pour nous, au contraire, les théorèmes projectifs plans, y compris le théorème de Pascal, résultent du théorème de Desargues, à l'exception des propriétés qui tiennent à l'axiome PIII, lesquelles pourraient être aussi bien classées dans la Géométrie métrique, comme on le verra plus loin.

La divergence de ces résultats tient à ce que nous supposons expressément, en plus des hypothèses I, que le continu considéré est à une dimension, ce qui n'a pas lieu dans la conception de la droite de M. Hilbert, conception qui n'en présente pas moins d'ailleurs un caractère nettement analytique.

Il conviendrait donc de faire précéder les formules I, qui définissent les propriétés des opérations additives, d'axiomes définissant celles du continu à une dimension.

On pourrait peut-être adopter à cet effet les définitions suivantes :

DÉFINITION. — Un ensemble  $A$  d'éléments est dit continu, lorsque, étant donné deux éléments quelconques de cet en-

<sup>1</sup> HILBERT, loc. cit.

semble, il est toujours possible de former un ensemble B d'éléments jouissant des propriétés suivantes :

1° Ils sont susceptibles d'être *ordonnés*, et cela de manière que les éléments donnés soient les extrêmes de la série, l'*ordre* étant une propriété représentée par un signe  $>$  soumis à une seule règle, savoir :

Si l'on a  $a > b$  et  $b > c$ , l'on a  $a > c$ . (L'élément  $b$  sera dit *compris entre a et c.*)

2° Entre deux éléments quelconques de l'ensemble B il en existe toujours un troisième.

3° Si un élément  $x$  varie toujours dans le même sens en ne dépassant jamais un élément déterminé  $a$ , c'est-à-dire si les déterminations successives  $x_1, x_2, x_3, \dots$  de  $x$  satisfont à la condition

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < a,$$

il existe toujours un élément  $b$ , tel que, quelque soit un élément  $c$  arbitrairement choisi,  $x$  puisse toujours devenir et rester ensuite compris entre  $b$  et  $c$ .

Il est à observer que la définition de la *limite*, contenue dans ce dernier membre de phrase, ne fait pas appel à l'idée de *différence* et par suite est indépendante de toute opération additive.

DÉFINITION. Lorsque entre deux éléments quelconques de l'ensemble A, on ne peut former qu'un nombre déterminé d'ensembles B, l'ensemble A est à *une dimension*.

On déduit facilement de ces définitions la possibilité de représenter les éléments d'un continu à une dimension par les nombres et par suite de leur appliquer les considérations analytiques qui conduisent à la formule (4).

L'opération représentée par la formule (4) n'est pas nécessairement archimédienne.

Supposons, par exemple, que l'on prenne soit

$$f(x) \equiv 2c \log \frac{2c - x}{2c + x}, \quad \text{soit} \quad f(x) \equiv 2c \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{2x}{2c}.$$

Dans le premier cas,  $f(x)$  représente une distance lobat-

chewskienne, au sens que nous indiquerons au paragraphe suivant, et la répétition indéfinie de l'opération donne lieu à un point limite  $x = 2c$ .

Dans le second cas,  $f(x)$  représente une distance riemannienne, et la répétition indéfinie de l'opération est impossible, car l'on obtient le point  $x = \infty$  après un nombre fini d'opérations.

L'opération ne satisfait d'ailleurs pas, dans ces cas, à la première des propriétés I; dans le premier cas, cette opération n'a pas de résultat, lorsque l'un des termes est représenté par une valeur de la coordonnée supérieure à  $2c$ ; dans le second cas, elle donne lieu à une détermination multiple.

COORDONNÉES PROJECTIVES. — Nous avons, dans ce qui précède, raisonné sur les points de la droite  $DD'$ , mais en fait, ce que nous avons établi, c'est une correspondance, sans lacune ni double emploi, entre l'ensemble des droites rayonnantes autour du point  $I$  et le continu numérique, pourvu toutefois que l'on ferme celui-ci sur lui-même en faisant coïncider  $+\infty$  et  $-\infty$ .

Pour que cette correspondance se poursuive sur la ligne droite, il faut et il suffit que deux points quelconques déterminent toujours une ligne droite et que deux droites coplanaires se rencontrent toujours en un point réel; ces conditions sont d'ailleurs indépendantes de la forme qu'on attribue aux lignes droites.

Dans le cas déjà signalé où l'on peut mener par un point deux droites asymptotiques à une autre droite, les nombres qui correspondent aux lignes de construction comprises dans l'angle formé par les deux asymptotiques à la droite  $DD'$  ne représentent aucun point réel de cette droite.

Dans le cas, au contraire, où il existe, sur cette droite, des points par lesquels il ne passe pas de lignes droites contenant le point  $I$ , ces points seraient dépourvus de coordonnées.

Dans le cas de l'unicité de l'asymptotique, pour avoir un système de coordonnées rigoureusement univoques, il suffit de faire coïncider la ligne de construction  $IA$ , cotée  $+\infty$ , avec l'asymptotique unique menée par le point  $I$  à  $DD'$ .

Signalons qu'on réalise ainsi, par l'emploi de la règle

seule, la mesure des segments sur une droite, à condition toutefois d'admettre que l'on puisse apprécier, avec telle approximation désirée (au moyen du rayon visuel, par exemple), l'asymptotisme de deux droites.

Il résulte des propriétés 7° et 8° que,  $a$  étant un élément (ou, si l'on veut, un segment) quelconque, l'expression  $na$ , où  $n$  est un nombre positif quelconque, représente toujours un des éléments du continu et est susceptible de représenter l'un quelconque de ces éléments.

Pour établir une correspondance univoque (ou presque) entre les nombres positifs et les points de la droite  $DD'$  compris entre  $O$  et  $A$ , il suffit donc de choisir un élément  $e$ , auquel l'on fait correspondre l'unité et de faire correspondre à un élément quelconque le nombre  $n$  tel que  $ne$  coïncide avec cet élément : le point  $O$  correspondant d'ailleurs à  $o$ , et  $A$  à  $\infty$  (cette dernière correspondance justifiant notre restriction : « presque » univoque).

L'opération inverse de l'addition permet de compléter la correspondance en dehors du segment  $OA$ , en déterminant les points représentés par les nombres négatifs, lesquels peuvent être en effet définis par la formule

$$-n = o - n.$$

Le système de coordonnées rectilinéaires que nous venons d'exposer d'après M. Hilbert n'est autre que celui de von Staudt<sup>1</sup>, obtenu au moyen de constructions plus simples.

Nous avons encore à mentionner quelques propriétés indispensables pour le développement de notre sujet.

On démontre, toujours par l'application du théorème de Desargues, qui constitue bien l'axiome projectif planaire, que le résultat de l'opération  $+$  appliquée à deux points d'une droite dépend uniquement des points limitant le segment considéré, que nous avons désignés par  $O$  et  $A$ , et nullement des autres éléments de la construction.

L'échelle numérique que cette construction nous a permis d'appliquer sur la droite ne dépend donc que du choix des

<sup>1</sup> VON STAUDT, *Geometrie der Lage*, p. 43; *Beiträge zur Geometrie der Lage*, p. 266, Korn, Nürnberg.

points correspondants aux nombres  $0, 1, \infty$ , ou, plus généralement, à trois nombres donnés quelconques.

La valeur  $n$  de la coordonnée est le *rapport anharmonique* déterminé par les points  $0, 1, \infty$  et  $n$  et peut d'ailleurs lui servir de définition ; le rapport  $\frac{n'}{n}$  est le rapport anharmonique déterminé par les points  $0, n, \infty, n'$ .

La valeur du rapport anharmonique, étant liée à des constructions purement projectives, est un invariant projectif.

En particulier, il se conserve lorsque l'on projette, d'un point du plan, les points de la droite sur une autre droite.

On peut établir, entre les points de deux droites, une correspondance dite *homographique*, caractérisée par le fait que le rapport anharmonique déterminé par quatre points quelconques de l'une des droites est égal au rapport anharmonique déterminé par les quatre points correspondants de l'autre droite.

Cette correspondance est déterminée par la connaissance de trois couples de points correspondants, de sorte que lorsque, sur deux droites qui se rencontrent, le point commun se correspond à lui-même, les droites joignant deux à deux les points correspondants sont concourantes. Cette propriété permet de démontrer le théorème de Pascal dans le cas où la conique est réduite à deux droites.

Parmi les relations que l'on démontre entre les rapports anharmoniques, nous signalerons la suivante, qui va être appliquée pour déterminer l'équation d'une droite.

$$(a, b, c, d) + (a, c, b, d) = 1.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir des systèmes de coordonnées projectifs pour le plan et l'espace. Pour le plan, on choisira trois droites et un point à l'intérieur du triangle qu'elles forment ; l'on donnera pour coordonnées à l'un des sommets :  $x = y = 0$  et au point situé à l'intérieur du triangle :  $x = y = 1$  ; la droite opposée au premier point comprendra les points de coordonnées infinies ;



enfin toute droite passant par l'un des deux autres sommets du triangle aura pour équation, suivant le cas,

$$x = C^{te} \quad \text{ou} \quad y = C^{te}.$$

On déterminera, au moyen des constructions exposées dans le paragraphe précédent, une correspondance entre le continu numérique et l'étoile de droites  $x = C^{te}$ , les droites correspondantes à  $x = 0, 1, \infty$  étant d'ailleurs données par ce qui précède, et l'on opérera de même pour les droites  $y = C^{te}$ .

Les coordonnées d'un point quelconque du plan seront déterminées par les droites de ces deux familles passant par ce point.

Enfin l'on établira l'équation d'une ligne droite rencontrant l'axe des  $x$  en un point  $x = a$  et l'axe des  $y$  en un point  $y = b$ , en démontrant, au moyen des propriétés mentionnées du rapport anharmonique, que  $x$  et  $y$  étant les coordonnées d'un point de la droite, l'on a

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Les lignes droites sont donc représentées par les équations linéaires.

Mentionnons également que l'on démontrerait par des procédés analogues que l'équation d'une conique, définie comme lieu du point de rencontre des rayons correspondants de deux faisceaux homographiques, est une équation du second degré.

Dès lors la Géométrie projective plane est réduite à une application de l'Analyse, et par cela même se trouve démontré le fait déjà énoncé que l'effet de l'axiome PII sur la géométrie plane est intégralement représenté par le théorème de Desargues, auquel on peut aussi substituer le théorème de Pascal limité au cas où la conique est réduite à deux droites.

Passons à la Géométrie dans l'espace.

Un système de coordonnées projectives sera déterminé au moyen d'un tétraèdre et d'un point suivant un procédé analogue à celui qui a été exposé pour le plan.

On démontrera que, dans un tel système de coordonnées, un plan quelconque est représenté par une équation linéaire.

On passe d'un de ces systèmes à un autre au moyen de formules de la forme

$$\begin{aligned} x' &= \frac{ax + by + cz + d}{a'''x + b'''y + c'''z + d'''} , \\ y' &= \frac{a'x + b'y + c'z + d'}{a'''x + b'''y + c'''z + d'''} , \\ z' &= \frac{a''x + b''y + c''z + d''}{a'''x + b'''y + c'''z + d'''} . \end{aligned}$$

Ces formules sont également les équations d'une transformation ponctuelle projective dans un des systèmes de coordonnées ainsi définis.

Il en résulte que les propriétés projectives des figures sont représentées, dans un de ces systèmes de coordonnées, par des formules indépendantes du système choisi.

La Géométrie projective se trouve maintenant réduite à une application de l'Analyse, et, par suite, est virtuellement établie, et cela sur les axiomes PI et PII.

Les observations faites au sujet des coordonnées projectives sur la droite dans l'hypothèse de l'unicité de l'asymptotique (axiome PIII) s'étendent facilement au cas de l'espace et l'on obtiendra, dans cette hypothèse, un système de coordonnées univoques en faisant éloigner indéfiniment le plan des coordonnées infinies.

Le système de coordonnées est alors déterminé par trois droites concourantes, appelées axes de coordonnées et par un point auquel on attribue les coordonnées

$$x = y = z = 1.$$

Signalons que, ainsi que nous l'avons fait observer à propos des coordonnées rectilinéaires, sur chacun des axes, les valeurs de la coordonnée réalisent une détermination métrique. Mais rien ne permet de passer d'un axe à l'autre : la Géométrie projective ne permet donc pas la comparaison des segments appartenant à des droites différentes.

On voit toutefois que la frontière entre la Géométrie pro-

jective et la Géométrie métrique n'est pas absolument nette, et que, si l'axiome PIII paraît, au premier abord, de caractère projectif, il a aussi des conséquences métriques.

Avant d'abandonner les conséquences de l'axiome PIII, observons que l'idée du *plan de l'infini*, que nous retrouvons en Géométrie métrique, est introduite par le fait que, dans un système de coordonnées projectives, les coordonnées d'un point qui s'éloigne indéfiniment tendent vers des valeurs satisfaisant à une équation de la forme.

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0.$$

Enfin observons qu'il résulte des considérations précédentes que l'axiome PIII est équivalent au suivant :

(PIII)' *Il existe des systèmes de coordonnées projectifs qui sont univoques.*

Cet axiome suppose l'existence de systèmes de coordonnées univoques et par suite l'admission de l'axiome AII.

Réciproquement, si l'axiome AII est admis, il est toujours possible de déterminer une famille (et par suite une infinité de familles) de lignes continues et ouvertes satisfaisant aux axiomes PI, PII et PIII. Dans la conception ordinaire de l'espace, une de ces familles est constituée par les droites.

L'on voit que les axiomes AI et AII résultent en somme des propriétés attribuées aux lignes droites, de sorte que les propriétés de l'espace sont, en dernière analyse, l'expression de propriétés de certaines lignes.

Pour pouvoir donner, ainsi que nous l'avons fait, aux axiomes PI et PII une signification analytique, ce qui entraîne l'introduction des imaginaires, il est nécessaire que les lignes auxquelles s'appliquent ces axiomes soient analytiques, c'est-à-dire soient représentées par des équations analytiques dans un système de coordonnées univoques.

Ces lignes sont évidemment analytiques par rapport aux systèmes de coordonnées qu'elles déterminent par les procédés que nous avons exposés. Elles resteront analytiques dans tout changement analytique de coordonnées, conduisant à un système de coordonnées univoques.

RÉSUMÉ. — Les propriétés projectives proprement dites se

déduisent des axiomes PI et PII, pris au sens analytique. Ce second axiome est représenté dans le plan par le théorème de Desargues.

Il existe une infinité de familles de lignes satisfaisant à ces axiomes, qui fournissent chacune une interprétation des propositions de la Géométrie projective.

On sait, au moyen de chacune de ces familles, établir des systèmes de coordonnées, qui sont univoques lorsque les lignes considérées satisfont à l'axiome PIII.

#### IV

### GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE

GROUPES MÉTRIQUES. — La Géométrie métrique met en œuvre, en plus des notions que nous avons déjà exposées, celle de déplacement sans déformation, base de l'idée de l'égalité des figures, dont l'étude est l'objet essentiel de cette Géométrie (la perpendicularité qui intervient dès les premières propositions est définie au moyen d'une égalité d'angles).

Sophus Lie a énoncé les propriétés fondamentales des déplacements sans déformation.

Nous choisirons, parmi les deux systèmes équivalents d'axiomes qu'il a donnés, celui dont l'interprétation géométrique est la plus directe. Mais nous entendons toutefois, suivant le principe constamment suivi dans cette étude, les employer dans leur signification analytique, signification toujours précise en vertu des axiomes AI et AII.

MI. — *Les déplacements sans déformation (Bewegungen) sont des transformations ponctuelles qui constituent un groupe réel et continu comprenant les inverses de toutes ses transformations.*

MII. — *Si l'on fixe un point quelconque, tous les points susceptibles d'être atteints par un autre point quelconque sont situés sur une surface contenant le second point et ne contenant pas le premier.*