Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1904)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES PRINCIPES ANALYTIQUES DE LA GÉOMÉTRIE
Autor: Combebiac, G.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7558

LES PRINCIPES ANALYTIQUES DE LA GÉOMÉTRIE

I

INTRODUCTION

Le raisonnement géométrique. — Précisons d'abord ce que l'on doit entendre par la question des Principes de la Géométrie.

Si l'on examine avec quelque attention les démonstrations géométriques — et les considérations que nous allons développer s'étendent facilement aux autres sciences rationnelles —, on reconnaît rapidement que les arguments employés se divisent en deux catégories.

Les arguments de la première catégorie consistent à mettrent en évidence l'identité *logique* (de λόγος, langage) d'une proposition avec une autre déjà admise, combinée généralement avec des définitions de mots n'ayant pas d'autre effet que d'abréger le discours.

C'est à ce procédé de raisonnement que s'appliquent presque exclusivement les conseils généralement donnés — par Descartes, Pascal et bien d'autres — en vue d'enseigner à raisonner correctement.

Il ne s'agit là que de combinaisons plus ou moins transcendantes de mots ou de signes, et la possibilité d'introduire des définitions nouvelles assure l'extension indéfinie de la science.

On conçoit la possibilité virtuelle de remplacer, pour une telle opération, le cerveau humain par une machine à raisonner.

C'est là le raisonnement proprement *logique*.

Ce procédé de raisonnement n'est pas le seul employé en Géométrie.

Considérons, par exemple, la démonstration donnée par Legendre de la proposition : « D'un point A pris hors d'une droite CD on peut abaisser une perpendiculaire sur cette droite. »

« Prenons sur CD un point B, et menons AB; faisons « l'angle DBA′ égal à l'angle DBA; prenons BA′=BA, et ti- « rons la droite AA′. Les deux triangles ABE, A′BE, ont le « côté BE commun; AB=BA′, et l'angle ABE est égal à « l'angle EBA′; ils sont donc égaux. On en conclut, etc. »

Le raisonnement ci-dessus n'a une signification que moyennant une figure. Nous devons effectuer, ou tout au moins nous représenter, les diverses opérations indiquées et en *constater* ainsi la possibilité, en confondant dans une même évocation les éléments géométriques et leurs propriétés.

Ce n'est plus de la pure logique.

Si, à la rigueur, la deuxième phrase du raisonnement cité peut être assez facilement ramenée, par une interprétation purement logique, à des propositions antérieurement énoncées, il ne saurait en être de même de la première phrase et celle-ci suppose que l'on suit les opérations indiquées sur une figure, en évoquant mentalement les propriétés que comportent implicitement les notions de droite, d'angle et d'égalité géométrique.

L'on effectue ainsi un raisonnement par images sensorielles.

C'est là le raisonnement *imaginatif* — certains disent *intuitif*.

Ce procédé, dans lequel on se contente de constater *de visu* les propriétés admises pour les notions mises en œuvre, dispense de la tâche difficile d'exprimer explicitement ces propriétés.

Son danger consiste en ce que, entraîné par l'image sensorielle, forcément particulière, qui sert de guide au raisonnement, on risque d'attribuer aux conclusions une généralité illégitime; bref ce procédé distingue mal ce qui découle *logiquement* des propositions antérieures de ce qui est dû aux propriétés de la figure particulière que l'on a devant les yeux.

Les deux sortes de raisonnement que nous avons caractérisées par les qualificatifs de *logique* et *imaginatif* peuvent l'être aussi par ceux de *analytique* et *synthétique*, ces termes se justifiant par cette considération que la première catégorie nécessite une *décomposition* préalable des notions en leurs différentes propriétés, afin de préciser nettement celles qui interviennent, tandis que, dans la deuxième catégorie, chaque notion se présente avec toutes ses propriétés, sans que l'on distingue nettement celles qui sont réellement utilisées dans la déduction.

Avertissons, à cette occasion, que, dans la suite de la présente étude, les mots *analyse* et *analytique* se rapporteront exclusivememt à l'Analyse mathématique, c'est-à-dire à la Théorie des Nombres.

La question des fondements. — La question des Principes de la Géométrie a pour objet la détermination précise de tout ce qui, en Géométrie, ne peut être rattaché à la pure logique et la distinction de la part d'influence qui revient aux différents concepts qui seront ainsi mis en évidence.

La solution de la question comporte l'établissement d'un système de *fondements* permettant d'éliminer totalement (du moins théoriquement) le raisonnement imaginatif et comprenant :

1° des notions fondamentales, au moyen desquelles toutes les autres puissent être construites par de simples définitions *logiques* (*alias* : définitions de mots) ;

2° des *axiomes*, c'est-à-dire des propositions exprimant certaines propriétés de ces notions fondamentales, telles que les autres propositions de la Géométrie puissent en résulter par déduction logique, avec combinaison des définitions que l'on est successivement conduit à introduire.

Observons tout de suite que, au point de vue auquel nous nous plaçons, les axiomes ont pour unique caractéristique d'être *admis sans démonstration*. Il n'est donc nullement question de décider s'ils sont vrais ou faux — question qui ne pourrait avoir qu'une signification physique —; évidents ou non — question sans signification précise — ; d'origine empirique ou *aprioristique* — question d'ordre exclusivement psychologique.

Dans la voie qui conduit aux éléments irréductibles de la Géométrie, on peut s'arrêter plus ou moins loin, et l'on néglige des points de vue fort intéressants, lorsque l'on pousse d'une traite jusqu'aux régions dénudées où la raison s'exerce sur de pures abstractions.

Dans ces dernières années, les principes de la Géométrie ont fait l'objet de beaux travaux, et l'on est parvenu à plusieurs systèmes de fondements, également acceptables, mais totalement abstraits : les notions prises pour bases sont de purs symboles (symboles non définis de M. Padoa [1]), n'ayant pas d'autres propriétés que celles qu'on leur attribue au moyen des axiomes, et à ces propriétés n'est attachée aucune image sensorielle.

Toute image sensorielle est ainsi éliminée, non seulement du raisonnement, mais encore des notions.

C'est ainsi que, pour M. Hilbert [2], les « POINTS », les « DROITES », les « PLANS » sont des êtres ou éléments n'ayant pas d'autres propriétés que celles d'être susceptibles d'avoir entr'eux certaines relations mutuelles exprimées par les mots « SONT SITUÉS », « ENTRE », « PARALLÈLE », « CONGRUENT ».

Les mots écrits en majuscules représentent les *notions fondamentales*. Chacune d'elles n'a pas d'existence par elle-même et ne saurait avoir de propriétés intrinsèques.

Les axiomes expriment les propriétés de relation permettant de combiner ces notions telles, par exemple, que :

« Deux points distincts déterminent toujours une droite. »

Une telle théorie ne fait appel qu'aux éléments les plus abstraits de notre conception, savoir ceux qui n'ont pas d'autres propriétés que d'être des concepts.

Même lorsqu'il se présente des éléments qui, au fond, sont

---

[1] PADOA. *Un nouveau système de définitions pour la Géométrie euclidienne.* (Compte rendu du Congrès international de mathématiques). Gauthiers-Villars, Paris, 1902.

[2] HILBERT. *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1899 : traduit en français par M. Laugel, Gauthier-Villars. Paris, 1900.

des nombres, on est obligé d'établir leurs propriétés, comme si l'Analyse algébrique n'existait pas, ce qui oblige à consacrer une large place à des considérations qui intéressent plutôt cette dernière science que la Géométrie.

Cet ostracisme de l'analyse est d'autant moins avantageux que, ainsi que l'on s'en rend facilement compte, toutes les combinaisons d'axiomes envisagées par les divers auteurs — notamment la Géométrie non-pascalienne de M. Hilbert — sont au fond des conceptions analytiques, de sorte que l'emploi de l'Analyse apporterait la clarté, tout en laissant, semble-t-il, la porte ouverte aux hypothèses.

Sont également des conceptions analytiques les *métriques* édifiées par MM. Minkowski[1], Hilbert[2] et Hamel[3], où disparaît l'idée de déplacement, l'idée de mesure étant basée uniquement sur la notion généralisée de la distance, qui n'est plus qu'une fonction d'un couple de points soumise à certaines conditions très générales.

Il est donc permis, avant d'essayer de créer des conceptions géométriques non susceptibles d'être représentées par des propriétés numériques — nous n'en connaissons d'ailleurs pas —, de demander à l'Analyse tout ce qu'elle peut donner.

En outre, sans méconnaître le grand intérêt que présente, tant pour la philosophie des Mathématiques que pour l'étude de l'intelligence, la réduction de la Géométrie à des conceptions purement logiques, l'on peut trouver utile de ne pas pousser aussi loin la dissociation des idées et de s'arrêter à un stade intermédiaire, où les notions fondamentales et les axiomes présentent encore une signification figurée (ou, proprement, géométrique).

Nous nous sommes donc proposé, dans ce travail, d'établir les fondements de la Géométrie en prenant pour notions fondamentales les seuls concepts inhérents à l'idée de figure, savoir : le point, la ligne et la surface.

---

[1] MINKOWSKI. *Geometrie der Zahlen*, Leipzig, Teubner, 1896.
[2] HILBERT, *Mathematische Annalen*, Bd. 34.
[3] HAMEL. *Ueber die Geometrieen, in denen die Geraden die kürzesten sind,* Göttingen, Dieterich, 1901.

Quant aux axiomes, ils auront pour objet de réduire la Géométrie à n'être qu'une application de l'Analyse algébrique. Ce résultat atteint, on se trouve sur un terrain solide et bien connu : la Géométrie est fondée.

Ce point de vue est loin d'être nouveau : c'est celui de Riemann, Helmholtz, Cayley, Sophus Lie, et nous ne pouvons avoir la prétention de faire œuvre bien originale. Nous croyons toutefois qu'il n'est pas sans intérêt, dans l'état où se trouve actuellement la question des Principes de la Géométrie, de coordonner, en vue d'une idée d'ensemble, des matériaux qui, à notre connaissance, sont demeurés épars.

Ajoutons que nous y avons trouvé l'occasion de présenter quelques observations, qui n'ont peut-être pas encore été faites.

Divisions de la géométrie. — Il est d'ailleurs remarquable que le point de vue analytique soit précisément celui d'où les principes de la Géométrie se présentent sous l'aspect le plus clair et qu'il conduise à un classement des notions géométriques conforme à la division qui s'est naturellement établie.

La géométrie vulgaire ou euclidienne — on s'en rend facilement compte par l'examen de ses principales propositions — est la science de la « mesure ».

Ses fondements doivent donc être constitués par les propriétés primordiales de l'égalité géométrique, qui est définie elle-même par la superposabilité, de sorte que, en dernière analyse, comme l'a vu pour la première fois Helmholtz, les vrais axiomes de la géométrie vulgaire ne sont autre chose que les propriétés des déplacements d'une figure invariable.

C'est pourquoi, les opérations employées dans les raisonnements que nous avons qualifiés d'*imaginatifs*, consistent toujours — directement ou indirectement — dans la superposition d'une figure à une autre.

Ce procédé joue, en Géométrie, le rôle tenu en arithmétique par le raisonnement *par récurrence*, qui s'impose là en raison de la genèse même des nombres entiers, laquelle s'opère par récurrence.

Mais la Géométrie s'est enrichie, depuis Euclide, d'un beau domaine, d'où est exclue l'idée de mesure.

On a d'abord établi, au commencement du dernier siècle, sous le nom de *Géométrie de situation* ou *Géométrie projective*, un ensemble de propriétés basées sur la seule idée de ligne droite.

Plus récemment s'est constituée, sous le nom d'*Analysis sitûs,* une doctrine qui s'attache à des propriétés encore plus générales des figures.

Tels sont donc les trois domaines : *Analysis sitûs,* Géométrie projective, Géométrie vulgaire ou métrique, que nous allons voir apparaître par l'introduction de notions de moins en moins générales.

II

ANALYSIS SITUS

Réduction de la géométrie a l'analyse. — Le premier des axiomes qui permettent l'application de l'Analyse algébrique à la Géométrie est le suivant :

A I. *L'espace ponctuel peut être représenté par une variété (ou multiplicité, Mannigfaltigkeit) numérique triple.*

Cet axiome ramène à des idées analytiques les notions de continuité, de ligne, de surface, d'intersection, de contact. Mais rien n'empêche d'associer les idées géométriques aux expressions analytiques correspondantes.

Nous conserverons donc, comme concepts essentiels de la Géométrie, les concepts de point, de continuité, de ligne et de surface, c'est-à-dire ceux qui sont inhérents à l'idée de figure.

Pour pouvoir donner une interprétation géométrique à l'axiome A I, il faudrait concevoir des géométries où cet axiome ne fût pas réalisé.

M. Hilbert[1] a établi une Géométrie, où les points ne constituent pas une variété numérique (Géométrie *non-pascalienne*), mais la théorie ainsi édifiée a une existence pure-

[1] Hilbert, *Grundlagen der Geometrie.*

ment analytique, et les éléments auxquels elle se rapporte ne sont susceptibles de correspondre à aucune idée comparable à celle de point, tout au moins dans l'exemple donné par le savant géomètre.

Coordonnées. — Les trois nombres qui, en vertu de l'axiome AI, représentent un point de l'espace sont appelés ses *coordonnées*.

L'établissement d'un système de coordonnées nécessite évidemment l'intervention d'opérations géométriques, ou « constructions », déterminant la correspondance entre les points de l'espace et les systèmes de valeurs des trois coordonnées.

A vrai dire, l'on ne voit guère le moyen de définir un système de coordonnées en utilisant uniquement les notions qui se rattachent à l'axiome AI, les constructions géométriques étant toutes basées sur l'emploi des corps solides, dont les propriétés doivent être classées parmi les propriétés métriques.

Mais rien n'empêche d'en admettre la possibilité virtuelle.

Un système de coordonnées x, y, z, une fois défini, on en obtient une infinité d'autres en effectuant des transformations de la forme

$$(1) \qquad x' = \varphi\,(x, y, z), \qquad y' = \psi\,(x, y, z) \qquad z' = \chi\,(x, y, z)$$

où φ, ψ et χ sont des fonctions quelconques.

Les équations (1) représentent, à volonté, un changement de coordonnées ou une transformation ponctuelle, c'est-à-dire une opération transformant un point de l'espace en un autre point (avec possibilité de détermination multiple, imaginaire, singulière ou présentant toute autre particularité), de sorte que l'on peut dire indifféremment que telle propriété est indépendante d'un certain changement de coordonnées ou qu'elle est invariante par rapport à la transformation ponctuelle correspondante à ce changement.

Les propriétés qui découlent uniquement de l'axiome AI sont évidemment indépendantes du choix des coordonnées.

On peut encore dire qu'elles sont invariantes dans toute transformation ponctuelle de l'espace. Autrement dit, les formules analytiques qui les expriment se conservent, lorsqu'on opère sur les coordonnées une transformation (1).

C'est là leur caractéristique, et l'on est tenté, pour cela, de les qualifier de *générales* et de désigner leur ensemble sous le nom de *Géométrie générale*.

Ne se rapportant qu'à un petit nombre de notions — celles que nous avons énoncées plus haut —, elles ne peuvent qu'être en nombre restreint.

Elles sont d'ailleurs, le plus souvent, fort simples.

Elles sont d'un ordre plus général que celles qui constituent proprement l'*Analysis sitûs,* dont nous allons maintenant nous occuper.

Observons que la notion de transformation ponctuelle, que nous venons d'introduire analytiquement, constitue un concept géométrique dont l'importance s'affirmera au cours de cette étude et qui a sa place, en Géométrie générale, à côté des concepts fondamentaux de point, de ligne et de surface.

Dans une transformation ponctuelle d'une figure, les points, les lignes, les surfaces, restent respectivement points, lignes, surfaces.

Degré de connexion de l'espace. — Les propriétés constituant l'*Analysis sitûs* peuvent être également ramenées à des propriétés analytiques, moyennant un complément à l'axiome A I.

Nous le donnerons sous une forme telle que l'axiome complémentaire comprendra le premier, cette dérogation au principe de l'indépendance des axiomes ne présentant pas grand inconvénient et nous permettant d'éviter des complications de langage.

A II. *On peut établir une correspondance univoque entre les points de l'espace et les systèmes de valeurs réelles et déterminées de trois nombres.*

Cet axiome peut encore s'énoncer :

(A II)' *L'espace est une variété numérique triple et triplement infinie à simple connexion.*

Cet axiome particularise l'espace parmi les variétés triples.

Nous signalerons brièvement les propriétés que peuvent présenter, au point de vue où nous nous trouvons, les variétés numériques.

L'ensemble de tous les systèmes de valeurs de n nombres constitue la variété n-uple type.

Mais on peut concevoir des variétés non susceptibles de correspondre, d'une manière univoque, à ces variétés types, et en établir une classification d'après les particularités que peut présenter la correspondance.

Fixons d'abord la terminologie pour tout le cours de cette étude, en observant que, dans le qualificatif « continue », appliqué à une variété géométrique : ligne, surface ou volume, nous comprenons toujours « non limitée », de sorte qu'une variété continue sera dite fermée ou ouverte, ce dernier qualificatif indiquant qu'elle s'étend à l'infini.

Les lignes sont des variétés simples, et les seules lignes susceptibles d'une correspondance univoque avec la série constituée par tous les nombres positifs et négatifs sont les lignes continues, sans points multiples et ouvertes, à l'exclusion notamment des lignes fermées.

De même, les seules surfaces (variétés doublement étendues) qui satisfont à la condition analogue sont les surfaces continues, simplement connexes, et doublement infinies, ce dernier qualificatif ayant pour but l'exclusion des surfaces fermées et des surfaces tubulaires (ou cylindroïdes), celles-ci pouvant aussi être dites « simplement infinies ».

Sur ces surfaces seules (les plans par exemple), il est possible d'établir des systèmes de coordonnées rigoureusement univoques.

Sur une surface simplement connexe, non tubulaire, une ligne fermée est rencontrée en un nombre pair de points par une ligne continue, fermée ou ouverte.

Le degré de connexion d'une surface continue (fermée ou ouverte) entraîne des propriétés correspondantes pour les deux domaines qu'elle détermine généralement dans l'espace. Mais ce degré peut être déterminé comme propriété intrinsèque de la surface, sans faire appel à la troisième dimension, en définissant cette surface comme variété numérique double.

Il en est de même en ce qui concerne les propriétés par rapport à l'infini, dont il vient d'être question.

Il existe également un degré de connexion pour les variétés triples sans qu'il soit besoin de faire appel, pour en avoir la notion, à une quatrième dimension.

Enfin on peut également distinguer, parmi les variétés triples et en se bornant aux variétés simplement connexes, les variétés fermées et les variétés simplement, doublement et triplement infinies.

Nous n'envisagerons pas l'hypothèse suivant laquelle l'espace serait une variété numérique à connexion multiple. Mais nous n'exclurons pas celle suivant laquelle l'espace serait une variété fermée, malgré les difficultés de conception qu'elle comporte, tenant notamment à ce que cette hypothèse entraîne la non-existence de lignes infinies.

Mais que peut-on entendre par existence ou non-existence d'une conception idéale ?

Comme on ne voit pas que l'affirmation ou la négation de cette hypothèse soit susceptible de conséquences objectives, il semble que l'on doive admettre que nous demeurons libres de concevoir l'espace ponctuel comme une variété ouverte ou comme une variété fermée.

Coordonnées univoques. — Les systèmes de coordonnées qui établissent une correspondance satisfaisant à la condition AII seront appelés *univoques*.

Il est évident qu'on obtiendra tous les systèmes de coordonnées univoques en appliquant à l'un d'eux une transformation (1) telle qu'à tout système de valeurs réelles et *déterminées* de x, y, z corresponde, d'une manière univoque, un système de valeurs réelles et *déterminées* de x', $y',$ z', et il est du reste entendu que nous ne comprenons pas le symbole $\pm\infty$ parmi les nombres déterminés.

Nous appellerons également univoques de telles transformations.

Enfin nous dirons que deux systèmes de coordonnées susceptibles d'être transformés l'un dans l'autre par une transformation univoque appartiennent au même *type*. C'est notamment ce qui a lieu pour tous les systèmes univoques.

On pressent l'importance des conséquences d'une hypothèse affirmant que tel système de coordonnées est univoque.

Si l'on admet par exemple (axiome d'Archimède) que, sur une droite, les distances euclidiennes x de tous les points à un point fixe constituent un système de coordonnées univoques, il ne pourra plus en être de même du système auquel donneront lieu les distances non euclidiennes X définies par la formule

$$X = 2c \log \frac{2c + x}{2c - x}.$$

Car toute valeur de x extérieure à l'intervalle de $-2c$ à $+2c$ donnera lieu à une valeur imaginaire de X, les limites entre les valeurs réelles et les valeurs imaginaires de X étant $+\infty$ et $-\infty$.

Infini géométrique. — Les symboles $+\infty$ et $-\infty$ jouissent, dans l'Analyse algébrique, de propriétés telles qu'il peut être avantageux, dans certains cas et en vue de la généralité de certaines propositions, de traiter le symbole $\pm\infty$ comme s'il représentait *une valeur* de la série des nombres, de telle sorte que celle-ci se fermerait alors sur elle-même.

Mais il ne s'agit là évidemment que d'une convention commode et, en énonçant l'axiome A II, nous n'avons pas entendu comprendre $\pm\infty$ parmi les nombres *déterminés*.

Il doit donc être entendu, d'après cet axiome, que, dans un système de coordonnées univoques, aucun point ne doit avoir pour coordonnées $\pm\infty$, et que, réciproquement, à tout système de valeurs *déterminées* (*alias* finies) doit correspondre un point *déterminé*.

De même nous entendons qu'une transformation ponctuelle univoque fait, ainsi que son inverse, correspondre à tout système de valeurs déterminées un autre système de valeurs également déterminées.

Il résulte de là que la propriété, pour une courbe, d'avoir des branches infinies, peut être définie analytiquement dans tout système de coordonnées univoques et par suite, étant indépendante du système de coordonnées (pourvu qu'il soit univoque), elle doit ressortir à l'*Analysis sitûs*, où l'idée de l'infini géométrique possède ainsi droit de cité, ce qui se trouve d'ailleurs en concordance avec l'intuition suivant laquelle l'idée de l'infini géométrique nous apparaît d'un ordre plus général, par exemple, que l'idée consistant dans la particularisation de certaines lignes, telles que les lignes droites.

Cette propriété d'avoir des branches infinies ne se conçoit d'ailleurs que pour une courbe dont les points sont déterminés au moyen d'une loi constructive ou analytique et ne s'ap-s'applique pas à l'idée sensorielle d'une courbe ou, comme l'on dit, à un ensemble *actuel* de points.

Les surfaces à nappes infinies donnent lieu à des observations analogues à celles que nous venons de présenter.

Asymptotisme. — Il nous reste, pour satisfaire à notre programme, à introduire analytiquement la notion d'*asymptotisme*, que l'intuition classe parmi les idées ressortissant à l'*Analysis sitûs*.

Considérons une branche infinie de courbe, telle que, lorsque le point x, y, z qui la décrit s'éloigne indéfiniment, les rapports $\frac{y}{x}$ et $\frac{z}{x}$ tendent vers des limites déterminées.

Considérons une autre branche de courbe ayant les mêmes propriétés et donnant lieu aux mêmes valeurs pour les limites des rapports $\frac{y'}{x'}$ et $\frac{z'}{x'}$ des coordonnées :

$$\lim.\ \frac{y}{x} = \lim \frac{y'}{x'}, \qquad \lim \frac{z}{x} = \lim \frac{z'}{x'}.$$

Nous dirons, dans ces conditions, que les deux branches infinies sont *asymptotiques*.

Mais cette propriété ne peut avoir une portée que si elle est indépendante, dans une certaine mesure, du choix du système de coordonnées, c'est-à-dire, suivant une remarque déjà faite, si elle est invariante par rapport à certaines transformations ponctuelles.

La propriété envisagée est évidemment invariante par rapport aux transformations linéaires; mais cette particularité la classerait dans une zone frontière intermédiaire, comme nous le verrons, entre la Géométrie projective et la Géométrie métrique. Ce degré d'invariance ne nous suffit pas.

Soit

$$u = f_1(x, y, z), \quad v = f_2(x, y, z), \quad w = f_3(x, y, z)$$

les équations représentant une transformation ponctuelle, et admettons que les rapports $\frac{v}{u}$ et $\frac{w}{u}$ aient pour limites, lorsque x, y, z augmentent indéfiniment dans les conditions définies plus haut, des fonctions de $\lim. \frac{y}{x}$ et $\lim. \frac{z}{x}$. C'est ce qui se produira lorsque u, v, w seront des fonctions rationnelles du même degré (positif) de x, y, z, ou même des fonctions se comportant à l'infini comme des fonctions rationnelles du même degré.

La propriété asymptotique se conservera évidemment dans la transformation ponctuelle envisagée, c'est-à-dire que si l'on a

$$\lim \frac{y}{x} = \lim \frac{y'}{x'}, \qquad \lim \frac{z}{x} = \lim \frac{z'}{x'},$$

l'on aura également

$$\lim \frac{v}{u} = \lim \frac{v'}{u'}, \qquad \lim \frac{w}{u} = \lim \frac{w'}{u'}.$$

Il résulte de là que la propriété asymptotique est invariante par rapport à des transformations beaucoup plus générales que les transformations linéaires.

L'asymptotisme doit donc ressortir à l'*Analysis sitûs*, et c'est la conclusion que nous voulions tirer de ces considérations.

Observons en terminant que, quoique les axiomes qui régissent l'*Analysis sitûs* expriment des propriétés de l'*espace*, on ne doit pas, pour cela, attribuer à celui-ci une existence propre: ses propriétés constituent simplement une manière d'exprimer des propriétés de certaines lignes et de certaines constructions, qui servent à établir les systèmes de coordonnées.

RÉSUMÉ. — A l'*Analysis sitûs* ressortissent les propriétés relatives à un groupe de notions, qui se ramènent aux suivantes : point, continuité, ligne, surface, transformation ponctuelle, connexion.

III

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

AXIOMES PROJECTIFS. — On appelle *projectives* les transformations dans lesquelles toute ligne droite est transformée en une ligne droite.

Les propriétés projectives des figures sont, par définition, celles qui sont invariantes (conservées) dans toute transformation ponctuelle projective de l'espace.

L'ensemble de ces propriétés constitue la *Géométrie projective*.

Il est clair, d'après cela, que les propriétés projectives sont celles qui, en plus des notions constituant l'objet de l'*Analysis sitûs*, font intervenir la notion de ligne droite.

Quelle que soit l'origine de la notion de ligne droite, cette notion doit être considérée, en Géométrie projective, comme primordiale, c'est-à-dire qu'elle n'est pas susceptible d'une définition la ramenant à des éléments appartenant à ce domaine; autrement dit, elle doit être considérée comme donnée, ou bien acquise par un *processus* étranger.

On pourrait, il est vrai, prendre pour notion primordiale celle de transformation ponctuelle projective, mais elle ne s'impose pas assez directement à notre conception sensorielle.

A défaut de définition, il est nécessaire d'énoncer les propriétés fondamentales de la ligne droite qui, jointes aux axiomes AI et AII, doivent servir d'axiomes à la Géométrie projective.

Les axiomes projectifs sont au nombre de trois, savoir :

P I. — *Les lignes droites forment une famille de lignes continues, telles qu'une d'entre elles est déterminée par la condition de passer par deux points donnés.*

P II. — *Lorsque deux droites sont concourantes, deux autres droites respectivement concourantes avec chacune d'elles* *(sans que trois de ces droites soient concourantes ensemble) sont concourantes entre elles.*

P III. — *Par un point on ne peut mener qu'une droite asymptotique à une autre droite.*

Ce dernier axiome, qui représente le *postulat des parallèles*, n'intervient pas dans les propriétés projectives, lorsqu'on se borne à leur signification analytique, en faisant abstraction des idées figurées qui leur correspondent. Nous ne le comprendrons parmi les axiomes projectifs que lorsque nous l'indiquerons expressément.

La condition pour qu'une ligne passe par un point donné s'exprime par deux équations.

L'axiome P I équivaut donc à ceci: que les droites forment une famille de lignes à quatre paramètres et que le système des quatre équations exprimant qu'une de ces lignes passe par deux points donnés a une solution unique.

L'axiome P II est la condition d'existence du plan, en ce qu'il permet de construire une famille à trois paramètres de surfaces, telles qu'une ligne droite qui a deux de ses points sur une de ces surfaces y est située tout entière.

Nous prenons ces axiomes *au sens analytique*, c'est-à-dire que, pour nous, la « condition de rencontre » de deux droites est la relation entre les paramètres de ces droites qui résulte de l'élimination des coordonnées entre leurs équations, étant admis que, lorsque la condition est remplie, les valeurs qui en résultent pour les coordonnées peuvent être impropres, par exemple imaginaires, si le système de coordonnées est univoque.

Cette généralisation de l'idée du concours de deux droites étend la portée des axiomes P I et P II — seuls axiomes projectifs proprement dits — à certaines familles de lignes qui n'y satisferaient pas sans cela. Il est facile de voir notamment que le second axiome, si on se bornait à sa signification *figurée*, ne pourrait être exact pour une famille de lignes ne satisfaisant pas à l'axiome de l'asymptotique unique. En outre, au sens analytique, plusieurs lignes asymptotiques entre elles sont concourantes.

Les axiomes P I et P II, même au sens analytique, représentent forcément des propriétés constructives; mais, celles-ci, lorsque le point de concours n'est pas réel, n'ont pas la simplicité nécessaire pour être introduites dans des axiomes.

Au lieu de prendre la ligne droite pour notion fondamentale de la Géométrie projective, on peut prendre le plan.

Les axiomes seraient alors :

(P I)'. — *Les plans forment une famille de surfaces, telles que l'une d'entre elles est déterminée par la condition de passer par trois points donnés.*

(P II)'. — *Trois plans ayant en commun plus d'un point ont en commun tous les points qui appartiennent à la fois à deux d'entre eux.*

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer l'équivalence des deux couples d'axiomes, après avoir d'abord établi la genèse du plan par le mouvement d'une droite passant par un point donné et s'appuyant sur une droite donnée, et montré que, en vertu de P II, une droite ayant deux points dans un plan y est située tout entière.

Lignes satisfaisant aux axiomes projectifs. — Il est clair que les axiomes posés jusqu'ici, qui particularisent les droites et les plans (en tant que familles plutôt qu'en ce qui concerne leur forme), ne les déterminent nullement et qu'il existe des infinités de familles de lignes et de surfaces jouissant de ces mêmes propriétés, de sorte que les propositions de la Géométrie projective, lesquelles, comme nous le démontrerons, résultent entièrement des axiomes projectifs, sont applicables à des figures où les surfaces et les lignes choisies pour répondre aux termes de « plans » et de « droites » ne seraient nullement identiques aux surfaces et aux lignes désignées habituellement par ces noms.

Les conclusions d'un raisonnement s'étendent en effet partout où sont applicables les propriétés réellement mises en œuvre, et c'est pour cela qu'il est toujours très scientifique de dégager nettement ces propriétés. Ce qui fait la *généralité* des raisonnements analytiques, c'est qu'ils s'appuient uniquement sur des propriétés que possèdent, *par définition*, les éléments dont ils s'occupent.

Nous signalerons brièvement les particularités que peuvent présenter les familles de lignes satisfaisant aux axiomes P I et P II, sans toutefois nous écarter des cas les plus simples, la généralité nécessitant des développements dans lesquels nous ne pouvons entrer.

1° Les lignes considérées sont fermées.

La surface engendrée par une ligne fermée variable passant par un point et s'appuyant sur une autre ligne fermée ne peut être que fermée: les surfaces jouant le rôle des plans seront donc fermées.

Si une telle surface est à simple connexion, deux lignes fermées tracées sur elle se rencontrent en un nombre pair de points ; l'axiome P I ne saurait donc être valable en toute rigueur. On peut toutefois en maintenir la portée essentielle en admettant que les points de l'espace soient associés deux à deux, de manière que, lorsque l'une des lignes considérées passe par un point, elle passe également par son associé. Une telle combinaison est réalisée par la famille à quatre paramètres constituée par les cercles ayant leur centre sur un plan donné. Les axiomes P I et P II seraient rigoureusement applicables, si l'on ne considérait que les points situés d'un même côté du plan donné ; si ce plan est rejeté à l'infini, on retombe sur la Géométrie ordinaire.

Mais on peut aussi supposer que les lignes jouant le rôle des droites, tout en étant fermées, ne puissent avoir, deux à deux, plus d'un point commun. Il est alors nécessaire que les surfaces jouant le rôle des plans soient *doubles*, et, par suite, *a fortiori*, doublement connexes.

2° Les lignes considérées sont ouvertes et ne satisfont pas à l'axiome de l'asymptotique unique. Les surfaces jouant le rôle des plans peuvent être alors simplement connexes et doublement infinies, comme les plans eux-mêmes.

Admettons que l'on ait déterminé sur une de ces surfaces, que l'on peut, pour la facilité de la représentation visuelle, supposer être un plan, un système de coordonnées univoques, et soit

$$af(xy) + b\varphi(xy) + c = o \tag{1}$$

l'équation générale des lignes considérées, $f(xy) = o$ et

$\varphi(xy) = o$ étant respectivement les équations de deux d'entre elles, et a, b, c, des paramètres (homogènes).

Supposons en outre que le système d'équations en xy :

$$f(xy) = \mathrm{X}, \quad \varphi(xy) = \mathrm{Y}, \tag{2}$$

où X et Y sont des nombres réels donnés, n'ait jamais plus d'une solution composée de valeurs réelles de x et y, quelles que soient les valeurs attribuées à X et Y.

Moyennant ces conditions, la famille de lignes (1) se prêtera à une interprétation de la Géométrie projective plane, dans laquelle cette famille sera substituée à celle des lignes droites.

En faisant varier les fonctions f et φ, on obtiendra, pour ces lignes, des formes très différentes entre elles, ainsi que des particularités diverses dans leurs relations.

Laissant de côté le cas où les valeurs des fonctions f et φ ne sont pas toujours réelles pour tout système de valeurs des coordonnées x et y, cas où il existe des points par lesquels il ne passe aucune des lignes (1), nous nous bornerons à signaler plus spécialement un cas où, au contraire, les fonctions f et φ ne prennent pas tous les systèmes de valeurs réelles lorsque l'on donne successivement à x et y toutes les valeurs réelles possibles, le cas limite étant celui où la transformation ponctuelle que représentent les équations (2), lorsqu'on y regarde X et Y comme constituant un second couple de variables, est univoque.

Supposons, par exemple, que, quelles que soient x et y, les valeurs X et Y de f et φ satisfassent toujours à l'inégalité

$$\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 < \mathrm{R}^2, \tag{3}$$

de sorte que, pour tout système de valeurs de X et Y n'y satisfaisant pas, le système d'équation (2) n'ait pas de solution réelle en x et y.

Les coordonnées x et y du point commun à deux lignes, déterminées respectivement par les paramètres a, b, c et a', b', c' sont données par les formules

$$f(xy) = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}, \qquad \varphi(xy) = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}.$$

Les valeurs correspondantes de x et y ne seront réelles que sous condition et en particulier elles ne le seront pas lorsque le dénominateur commun sera suffisamment grand.

Il est facile de voir que, par tout point de la surface, passent une infinité de lignes (1) ne rencontrant pas une autre de ces lignes donnée.

Les deux séries de lignes seront délimitées par deux d'entre elles qui seront asymptotiques à la ligne donnée.

C'est l'hypothèse de Lobatchewski sur les lignes droites.

Si, à la limite, on suppose que la transformation (2) soit univoque, les valeurs des coordonnées x et y ne seront infinies que dans le cas où l'on aura

$$ab' - ba' = o,$$

et les deux asymptotiques susceptibles d'être menées par un point à une ligne donnée de la famille (1) se confondent toujours en une seule : c'est l'hypothèse euclidienne.

Il est d'ailleurs facile de former des fonctions f et φ dont les valeurs satisfassent à l'inégalité (3).

Considérons, pour cela, un cercle de rayon R ayant pour centre l'origine des coordonnées, et représentons le plan entier sur la région intérieure à ce cercle de la manière suivante :

A tout point M du plan faisons correspondre un point M' situé sur le même rayon et tel que les distances respectives r et r' des deux points au centre du cercle soient liées par la relation

$$r = \mathrm{R} \log \frac{\mathrm{R} + r'}{\mathrm{R} - r'} \qquad \text{ou} \qquad r' = \mathrm{R} \frac{e^{\frac{r}{\mathrm{R}}} - 1}{e^{\frac{r}{\mathrm{R}}} + 1}.$$

En désignant par x et y les coordonnées rectangulaires du point M et par X et Y celles du point M', on aura

$$x = \mathrm{R} \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \log \frac{\mathrm{R} + \sqrt{X^2 + Y^2}}{\mathrm{R} - \sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad y = \mathrm{R} \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \log \frac{\mathrm{R} + \sqrt{X^2 + Y^2}}{\mathrm{R} - \sqrt{X^2 + Y^2}}$$

et

$$X = \mathrm{R} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{e^{\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\mathrm{R}}} - 1}{e^{\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\mathrm{R}}} + 1}, \quad Y = \mathrm{R} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{e^{\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\mathrm{R}}} - 1}{e^{\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\mathrm{R}}} + 1}.$$

on a

$$X^2 + Y^2 = R^2 \left(\frac{e^{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}} - 1}{e^{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}} + 1} \right)^2 < R^2$$

Il suffit donc de prendre, pour $f(xy)$ et $\varphi(xy)$, les expressions ci-dessus de X et Y, pour que l'équation (1) soit l'équation de lignes jouissant des propriétés projectives des lignes droites dans le plan et telles que par un point on puisse mener à l'une d'elles deux asymptotiques.

3° Lignes ouvertes et satisfaisant à l'axiome de l'asymptotique unique.

Pour obtenir une famille de lignes satisfaisant, non seulement aux axiomes PI et PII, mais encore à l'axiome PIII, il suffit de considérer les transformées des lignes droites dans une transformation ponctuelle univoque, par exemple celle qui est définie de la manière suivante : $x, y, z,$ étant les coordonnées d'un point, celles du transformé ont pour expressions

$$x' = \pm\, e^{(x)} - 1, \qquad y' = \pm\, e^{(y)} - 1, \qquad z' = \pm\, e^{(z)} - 1,$$

où $(x), (y), (z)$ représentent les valeurs absolues de x, y, z et où les signes placés devant les exponentielles sont à choisir de manière que x', y', z' soient respectivement de même signe que x, y, z.

Portée du théorème de Desargues. — Un théorème projectif important de Géométrie plane est le théorème de Desargues, qui peut être énoncé de la manière suivante :

Théorème de Desargues. — *Lorsque deux triangles situés dans un même plan sont tels que les trois droites joignant leurs sommets deux à deux sont concourantes, les côtés respectivement opposés aux dits sommets se coupent deux à deux sur une même droite, et réciproquement.*

Ce théorème résulte facilement de l'axiome PII, en regardant les deux triangles comme les projections, faites de deux points de vue différents, d'un même triangle de l'espace.

Les axiomes PI et PIII sont tout autant planaires que spatiaux.

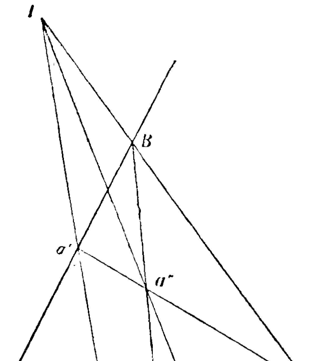
Ils constituent, avec le théorème de Desargues, un groupe d'axiomes projectifs planaires, de sorte que le théorème de Desargues est le représentant, dans le plan, de l'axiome PII.

Ce fait important, mis en évidence sous une autre forme par M. Hilbert [1], résulte des propositions que nous énoncerons sans démonstration (pour ne pas trop allonger cet article) au paragraphe suivant.

Calcul segmentaire de M. Hilbert. — Pour la facilité du langage, nous appellerons « droites » des lignes constituant une famille satisfaisant aux axiomes PI et PII, mais il reste entendu qu'elles peuvent présenter les formes les plus diverses.

Nous allons établir un système de coordonnées sur une de ces lignes au moyen d'une construction exposée par M. Hilbert, dans laquelle toutefois nous remplacerons, en vue de la généralité et pour éviter l'hypothèse de l'asymptotique unique, la droite de l'infini par une droite quelconque. La construction ainsi généralisée ne perd d'ailleurs aucune de ses propriétés essentielles, lesquelles tiennent uniquement à l'axiome PI et au théorème de Desargues.

Nous supposerons seulement qu'on sache déterminer, dans le plan, le point de concours de deux droites ainsi que la droite joignant deux points, étant d'ailleurs observé que lorsqu'un des points n'est pas réel ou est rejeté à l'infini, le tracé est toujours possible par l'application du théorème de Desargues.



Sur la droite considérée DD′, prenons deux points O et A, traçons deux lignes droites passant l'une par O, l'autre par A et se coupant en B, et choisissons sur la ligne AB un point I.

Etant donnés deux points a et b de la droite DD′ situés entre O et A, effectuons les constructions suivantes :

Déterminons a' par l'intersection de la

[1] Hilbert, loc. cit.

et OB, puis a'' par l'intersection de Aa' et Bb, enfin c par l'intersection de Ia'' et DD'.

Désignons par le signe + l'opération que nous venons de définir par ces constructions, c'est-à-dire posons

$$a + b = c.$$

Cette opération jouit de propriétés importantes que l'on peut démontrer directement en s'appuyant soit sur l'axiome PII, soit sur le théorème de Desargues, qui le représente dans le plan.

On peut aussi déduire logiquement ces propriétés d'un certain nombre d'entr'elles, que nous exprimerons de la manière suivante, où nous représentons par o l'élément initial O, en raison de ses propriétés :

$$\text{I} \quad \left\{ \begin{array}{lll} a + b = x & \text{a toujours une et une seule solution en } x; & \\ (a + b) + c = a + (b + c), & & a + o = a, \\ \quad a + b > a, & & a + b > b. \\ \text{lorsque } b > c, & \text{on a} & a + b > a + c. \end{array} \right.$$

Le signe > a pour objet d'exprimer l'ordre des éléments par rapport au sens de parcours de O vers A.

Appelons *opération additive* une opération + possédant les propriétés I et s'appliquant aux éléments d'un continu simplement étendu (ou à une dimension), ayant un élément initial représenté par 0 et pouvant soit se prolonger indéfiniment soit avoir un second élément extrême A.

Nous énoncerons, sans démonstration, quelques-unes des conséquences des propriétés I :

1° $a + b = b + a$, c'est-à-dire que l'opération additive, qui, par hypothèse, est associative, est en outre commutative ;

2° L'expression $a + x$ représente une fonction croissante et continue de x;

3° Lorsque $b > a$, il existe toujours un élément x, tel que

$$a + x = b\ ;$$

4° L'expression nx, où n est un nombre entier, représente une fonction continue et croissante de x, nx étant définie par la formule

$$nx = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{n};$$

5° Il existe toujours, entre o et a, un élément x, tel que l'on a, n étant un nombre entier donné,

$$nx = a, \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{n};$$

6° Il est dès lors possible de définir, au moyen de procédés calqués sur ceux de la numération, l'élément représenté par na, n étant un nombre entier, frationnaire ou incommensurable;

7° L'expression na, où a est un élément constant, représente une fonction continue et croissante du nombre n;

8° L'élément na, lorsque n augmente indéfiniment (peu importe que ce soit par valeurs entières ou par variation continue), a pour limite l'élément extrême du continu, ce qui exprime : d'abord que l'opération dont le résultat est na est toujours possible (1re ligne des formules I), ensuite qu'elle permet de dépasser un élément quelconque.

Nous exprimerons la propriété 8° en disant que l'opération fondamentale envisagée (opération +) est *archimédienne*, par allusion au principe d'Archimède, qui s'énonce ainsi:

Si a *et* b *désignent deux nombres quelconques, il est toujours possible d'ajouter* a *à lui-même un nombre de fois suffisant pour que la somme qui en résulte ait la propriété :*

$$a + a + \ldots + a > b.$$

Axiomes du continu linéaire. — Observons que les opérations qui jouissent des propriétés que nous venons de mentionner se définissent analytiquement avec beaucoup de facilité.

Faisons correspondre à tout élément du continu à une dimension considéré un nombre positif, la valeur o étant attribuée à l'élément initial et ∞ à l'élément extrême. L'élément z, résultat de l'opération + effectuée sur les éléments x et y, devra être déterminé par une formule (algébrique cette fois) de la forme

$$(4) \qquad f(z) = f(x) + f(y).$$

$f(x)$ étant une fonction de x positive, continue, croissante, uniforme et ayant, ainsi que son inverse, une détermination toujours réelle, cette dernière propriété ayant pour conséquence que $f(x)$ croît indéfiniment avec x.

M. Hilbert[1] admet qu'il existe des opérations qui satisfont à toutes les conditions I, et qui ne possèdent ni la propriété commutative ni la propriété archimédienne, celle-ci entraînant d'ailleurs celle-là.

Le savant géomètre construit, dans ces conditions, une Géométrie plane *arguésienne* et *non-pascalienne*, dans laquelle certains théorèmes projectifs ne sont plus vrais, notamment le théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit dans une conique (limité au cas où la conique est réduite à deux droites).

Pour nous, au contraire, les théorèmes projectifs plans, y compris le théorème de Pascal, résultent du théorème de Desargues, à l'exception des propriétés qui tiennent à l'axiome PIII, lesquelles pourraient être aussi bien classées dans la Géométrie métrique, comme on le verra plus loin.

La divergence de ces résultats tient à ce que nous supposons expressément, en plus des hypothèses I, que le continu considéré est à une dimension, ce qui n'a pas lieu dans la conception de la droite de M. Hilbert, conception qui n'en présente pas moins d'ailleurs un caractère nettement analytique.

Il conviendrait donc de faire précéder les formules I, qui définissent les propriétés des opérations additives, d'axiomes définissant celles du continu à une dimension.

On pourrait peut-être adopter à cet effet les définitions suivantes :

Définition. — Un ensemble A d'éléments est dit continu, lorsque, étant donné deux éléments quelconques de cet en-

[1] Hilbert, loc. cit.

semble, il est toujours possible de former un ensemble B d'éléments jouissant des propriétés suivantes :

1° Ils sont susceptibles d'être *ordonnés*, et cela de manière que les éléments donnés soient les extrêmes de la série, l'*ordre* étant une propriété représentée par un signe $>$ soumis à une seule règle, savoir :

Si l'on a $a > b$ et $b > c$, l'on a $a > c$. (L'élément b sera dit *compris entre* a et c.)

2° Entre deux éléments quelconques de l'ensemble B il en existe toujours un troisième.

3° Si un élément x varie toujours dans le même sens en ne dépassant jamais un élément déterminé a, c'est-à-dire si les déterminations successives $x_1, x_2, x_3, \ldots$ de x satisfont à la condition

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < a,$$

il existe toujours un élément b, tel que, quelque soit un élément c arbitrairement choisi, x puisse toujours devenir et rester ensuite compris entre b et c.

Il est à observer que la définition de la *limite*, contenue dans ce dernier membre de phrase, ne fait pas appel à l'idée de *différence* et par suite est indépendante de toute opération additive.

Définition. Lorsque entre deux éléments quelconques de l'ensemble A, on ne peut former qu'un nombre déterminé d'ensembles B, l'ensemble A est *à une dimension*.

On déduit facilement de ces définitions la possibilité de représenter les éléments d'un continu à une dimension par les nombres et par suite de leur appliquer les considérations analytiques qui conduisent à la formule (4).

L'opération représentée par la formule (4) n'est pas nécessairement archimédienne.

Supposons, par exemple, que l'on prenne soit

$$f(x) \equiv 2c \log \frac{2c - x}{2c + x}, \qquad \text{soit} \qquad f(x) \equiv 2c \operatorname{arc\,tang} \frac{2x}{2c}.$$

Dans le premier cas, $f(x)$ représente une distance lobatchewskienne, au sens que nous indiquerons au paragraphe suivant, et la répétition indéfinie de l'opération donne lieu à un point limite $x = 2c$.

Dans le second cas, $f(x)$ représente une distance riemannienne, et la répétition indéfinie de l'opération est impossible, car l'on obtient le point $x = \infty$ après un nombre fini d'opérations.

L'opération ne satisfait d'ailleurs pas, dans ces cas, à la première des propriétés I; dans le premier cas, cette opération n'a pas de résultat, lorsque l'un des termes est représenté par une valeur de la coordonnée supérieure à $2c$; dans le second cas, elle donne lieu à une détermination multiple.

Coordonnées projectives. — Nous avons, dans ce qui précède, raisonné sur les points de la droite DD′, mais en fait, ce que nous avons établi, c'est une correspondance, sans lacune ni double emploi, entre l'ensemble des droites rayonnantes autour du point I et le continu numérique, pourvu toutefois que l'on ferme celui-ci sur lui-même en faisant coïncider $+\infty$ et $-\infty$.

Pour que cette correspondance se poursuive sur la ligne droite, il faut et il suffit que deux points quelconques déterminent toujours une ligne droite et que deux droites coplanaires se rencontrent toujours en un point réel; ces conditions sont d'ailleurs indépendantes de la forme qu'on attribue aux lignes droites.

Dans le cas déjà signalé où l'on peut mener par un point deux droites asymptotiques à une autre droite, les nombres qui correspondent aux lignes de construction comprises dans l'angle formé par les deux asmyptotiques à la droite DD′ ne représentent aucun point réel de cette droite.

Dans le cas, au contraire, où il existe, sur cette droite, des points par lesquels il ne passe pas de lignes droites contenant le point I, ces points seraient dépourvus de coordonnées.

Dans le cas de l'unicité de l'asymptotique, pour avoir un système de coordonnées rigoureusement univoques, il suffit de faire coïncider la ligne de construction IA, cotée $+\infty$, avec l'asymptotique unique menée par le point I à DD′.

Signalons qu'on réalise ainsi, par l'emploi de la *règle* seule, la mesure des segments sur une droite, à condition toutefois d'admettre que l'on puisse apprécier, avec telle approximation désirée (au moyen du rayon visuel, par exemple), l'asymptotisme de deux droites.

Il résulte des propriétés 7° et 8° que, a étant un élément (ou, si l'on veut, un segment) quelconque, l'expression na, où n est un nombre positif quelconque, représente toujours un des éléments du continu et est susceptible de représenter l'un quelconque de ces éléments.

Pour établir une correspondance univoque (ou presque) entre les nombres positifs et les points de la droite DD′ compris entre O et A, il suffit donc de choisir un élément e, auquel l'on fait correspondre l'unité et de faire correspondre à un élément quelconque le nombre n tel que ne coïncide avec cet élément : le point O correspondant d'ailleurs à o, et A à ∞ (cette dernière correspondance justifiant notre restriction : « presque » univoque).

L'opération inverse de l'addition permet de compléter la correspondance en dehors du segment OA, en déterminant les points représentés par les nombres négatifs, lesquels peuvent être en effet définis par la formule

$$-n = o - n.$$

Le système de coordonnées rectilinéaires que nous venons d'exposer d'après M. Hilbert n'est autre que celui de von Staudt[1], obtenu au moyen de constructions plus simples.

Nous avons encore à mentionner quelques propriétés indispensables pour le développement de notre sujet.

On démontre, toujours par l'application du théorème de Desargues, qui constitue bien l'axiome projectif planaire, que le résultat de l'opération + appliquée à deux points d'une droite dépend uniquement des points limitant le segment considéré, que nous avons désignés par O et A, et nullement des autres éléments de la construction.

L'échelle numérique que cette construction nous a permis d'appliquer sur la droite ne dépend donc que du choix des

---

[1] Von Staudt, *Geometrie der Lage*, p. 43; *Beiträge zur Geometrie der Lage*, p. 266, Korn, Nurnberg.

points correspondants aux nombres 0, 1, ∞, ou, plus généralement, à trois nombres donnés quelconques.

La valeur n de la coordonnée est le *rapport anharmonique* déterminé par les points 0, 1, ∞ et n et peut d'ailleurs lui servir de définition ; le rapport $\frac{n'}{n}$ est le rapport anharmonique déterminé par les points o, n, ∞, n'.

La valeur du rapport anharmonique, étant liée à des constructions purement projectives, est un invariant projectif.

En particulier, il se conserve lorsque l'on projette, d'un point du plan, les points de la droite sur une autre droite.

On peut établir, entre les points de deux droites, une correspondance dite *homographique*, caractérisée par le fait que le rapport anharmonique déterminé par quatre points quelconques de l'une des droites est égal au rapport anharmonique déterminé par les quatre points correspondants de l'autre droite.

Cette correspondance est déterminée par la connaissance de trois couples de points correspondants, de sorte que lorsque, sur deux droites qui se rencontrent, le point commun se correspond à lui-même, les droites joignant deux à deux les points correspondants sont concourantes. Cette propriété permet de démontrer le théorème de Pascal dans le cas où la conique est réduite à deux droites.

Parmi les relations que l'on démontre entre les rapports anharmoniques, nous signalerons la suivante, qui va être appliquée pour déterminer l'équation d'une droite.

$$(a,b,c,d) + (a,c,b,d) = 1.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir des systèmes de coordonnées projectifs pour le plan et l'espace. Pour le plan, on choisira trois droites et un point à l'intérieur du triangle qu'elles forment ; l'on donnera pour coordonnées à l'un des sommets : $x = y = o$ et au point situé à l'intérieur du triangle: $x = y = 1$; la droite opposée au premier point comprendra les points de coordonnées infinies ;

enfin toute droite passant par l'un des deux autres sommets du triangle aura pour équation, suivant le cas,

$$x = C^{te} \quad \text{ou} \quad y = C^{te}.$$

On déterminera, au moyen des constructions exposées dans le paragraphe précédent, une correspondance entre le continu numérique et l'étoile de droites $x = C^{te}$, les droites correspondantes à $x = 0, 1, \infty$ étant d'ailleurs données par ce qui précède, et l'on opérera de même pour les droites $y = C^{te}$.

Les coordonnées d'un point quelconque du plan seront déterminées par les droites de ces deux familles passant par ce point.

Enfin l'on établira l'équation d'une ligne droite rencontrant l'axe des x en un point $x = a$ et l'axe des y en un point $y = b$, en démontrant, au moyen des propriétés mentionnées du rapport anharmonique, que x et y étant les coordonnées d'un point de la droite, l'on a

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Les lignes droites sont donc représentées par les équations linéaires.

Mentionnons également que l'on démontrerait par des procédés analogues que l'équation d'une conique, définie comme lieu du point de rencontre des rayons correspondants de deux faisceaux homographiques, est une équation du second degré.

Dès lors la Géométrie projective plane est réduite à une application de l'Analyse, et par cela même se trouve démontré le fait déjà énoncé que l'effet de l'axiome PII sur la géométrie plane est intégralement représenté par le théorème de Desargues, auquel on peut aussi substituer le théorème de Pascal limité au cas où la conique est réduite à deux droites.

Passons à la Géométrie dans l'espace.

Un système de coordonnées projectives sera déterminé au moyen d'un tétraèdre et d'un point suivant un procédé analogue à celui qui a été exposé pour le plan.

On démontrera que, dans un tel système de coordonnées, un plan quelconque est représenté par une équation linéaire.

On passe d'un de ces systèmes à un autre au moyen de formules de la forme

$$x' = \frac{ax + by + cz + d}{a'''x + b'''y + c'''z + d'''},$$

$$y' = \frac{a'x + b'y + c'z + d'}{a'''x + b'''y + c'''z + d'''},$$

$$z' = \frac{a''x + b''y + c''z + d''}{a'''x + b'''y + c'''z + d'''}.$$

Ces formules sont également les équations d'une transformation ponctuelle projective dans un des systèmes de coordonnées ainsi définis.

Il en résulte que les propriétés projectives des figures sont représentées, dans un de ces systèmes de coordonnées, par des formules indépendantes du système choisi.

La Géométrie projective se trouve maintenant réduite à une application de l'Analyse, et, par suite, est virtuellement établie, et cela sur les axiomes PI et PII.

Les observations faites au sujet des cordonnées projectives sur la droite dans l'hypothèse de l'unicité de l'asymptotique (axiome PIII) s'étendent facilement au cas de l'espace et l'on obtiendra, dans cette hypothèse, un système de coordonnées univoques en faisant éloigner indéfiniment le plan des coordonnées infinies.

Le système de coordonnées est alors déterminé par trois droites concourantes, appelées axes de coordonnées et par un point auquel on attribue les coordonnées

$$x = y = z = 1.$$

Signalons que, ainsi que nous l'avons fait observer à propos des coordonnées rectilinéaires, sur chacun des axes, les valeurs de la coordonnée réalisent une détermination métrique. Mais rien ne permet de passer d'un axe à l'autre : la Géométrie projective ne permet donc pas la comparaison des segments appartenant à des droites différentes.

On voit toutefois que la frontière entre la Géométrie projective et la Géométrie métrique n'est pas absolument nette, et que, si l'axiome PIII paraît, au premier abord, de caractère projectif, il a aussi des conséquences métriques.

Avant d'abandonner les conséquences de l'axiome PIII, observons que l'idée du *plan de l'infini,* que nous retrouverons en Géométrie métrique, est introduite par le fait que, dans un système de coordonnées projectives, les coordonnées d'un point qui s'éloigne indéfiniment tendent vers des valeurs satisfaisant à une équation de la forme.

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = o.$$

Enfin observons qu'il résulte des considérations précédentes que l'axiome PIII est équivalent au suivant :

(PIII)' *Il existe des systèmes de coordonnées projectifs qui sont univoques.*

Cet axiome suppose l'existence de systèmes de coordonnées univoques et par suite l'admission de l'axiome AII.

Réciproquement, si l'axiome AII est admis, il est toujours possible de déterminer une famille (et par suite une infinité de familles) de lignes continues et ouvertes satisfaisant aux axiomes PI, PII et PIII. Dans la conception ordinaire de l'espace, une de ces familles est constituée par les droites.

L'on voit que les axiomes AI et AII résultent en somme des propriétés attribuées aux lignes droites, de sorte que les propriétés de l'*espace* sont, en dernière analyse, l'expression de propriétés de certaines lignes.

Pour pouvoir donner, ainsi que nous l'avons fait, aux axiomes PI et PII une signification analytique, ce qui entraîne l'introduction des imaginaires, il est nécessaire que les lignes auxquelles s'appliquent ces axiomes soient analytiques, c'est-à-dire soient représentées par des équations analytiques dans un système de coordonnées univoques.

Ces lignes sont évidemment analytiques par rapport aux systèmes de coordonnées qu'elles déterminent par les procédés que nous avons exposés. Elles resteront analytiques dans tout changement analytique de coordonnées, conduisant à un système de coordonnées univoques.

RÉSUMÉ. — Les propriétés projectives proprement dites se déduisent des axiomes PI et PII, pris au sens analytique. Ce second axiome est représenté dans le plan par le théorème de Desargues.

Il existe une infinité de familles de lignes satisfaisant à ces axiomes, qui fournissent chacune une interprétation des propositions de la Géométrie projective.

On sait, au moyen de chacune de ces familles, établir des systèmes de coordonnées, qui sont univoques lorsque les lignes considérées satisfont à l'axiome PIII.

IV

GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE

Groupes métriques. — La Géométrie métrique met en œuvre, en plus des notions que nous avons déjà exposées, celle de déplacement sans déformation, base de l'idée de l'égalité des figures, dont l'étude est l'objet essentiel de cette Géométrie (la perpendicularité qui intervient dès les premières propositions est définie au moyen d'une égalité d'angles).

Sophus Lie a énoncé les propriétés fondamentales des déplacements sans déformation.

Nous choisirons, parmi les deux systèmes équivalents d'axiomes qu'il a donnés, celui dont l'interprétation géométrique est la plus directe. Mais nous entendons toutefois, suivant le principe constamment suivi dans cette étude, les employer dans leur signification analytique, signification toujours précise en vertu des axiomes AI et AII.

MI. — *Les déplacements sans déformation (Bewegungen) sont des transformations ponctuelles qui constituent un groupe réel et continu comprenant les inverses de toutes ses transformations.*

MII. — *Si l'on fixe un point quelconque, tous les points susceptibles d'être atteints par un autre point quelconque sont situés sur une surface contenant le second point et ne contenant pas le premier.*

VIII. — *Autour du point fixe il existe un domaine triplement étendu et de dimensions finies, dans lequel tout point peut atteindre, par un déplacement continu, tout autre point situé sur la surface correspondante, définie ci-dessus.*

Sophus Lie démontre que ce système d'axiomes, dont la signification analytique est bien déterminée, caractérise *les groupes continus de transformations projectives conservant chacun une quadrique, ordinaire ou dégénérée, et les groupes qui leur sont semblables,* c'est-à-dire qui peuvent être obtenus au moyen des premiers par l'application d'une transformation ponctuelle.

Nous appellerons *métriques* ces divers groupes.

Parmi les propriétés qui leur sont communes, nous signalerons, en premier lieu, la suivante :

Deux points étant fixes, un déplacement continu est encore possible, dans lequel restent fixes les divers points d'une ligne passant par les deux points.

Les lignes ainsi introduites, étant déterminées par la connaissance de deux de leurs points, forment une famille à quatre paramètres. Appelons-les *axes* du groupe métrique.

Dans le cas où le groupe métrique est *projectif*, c'est-à-dire est composé de transformations projectives, il est facile de voir que ses axes sont les lignes droites.

De la manière même dont les groupes métriques non projectifs sont obtenus, suivant le théorème de Sophus Lie, au moyen des groupes métriques projectifs, il résulte que les axes relatifs à chacun d'eux sont les lignes transformées des lignes droites au moyen d'une transformation ponctuelle.

Comme, d'autre part, les propriétés PI et PII des lignes droites sont évidemment de celles qui se conservent dans une transformation ponctuelle générale (toutes réserves étant faites toutefois au sujet de particularités pouvant être introduites par l'existence de singularités, de déterminations multiples, etc.), on peut énoncer le théorème suivant :

Les propriétés PI et PII des lignes droites appartiennent également aux axes de tout groupe métrique.

Etant donné une famille de lignes satisfaisant aux axiomes PI et PII, l'on pourra toujours déterminer, par le procédé indiqué au paragraphe II, un système de coordonnées (univoque ou non). Tout groupe métrique admettant ces lignes pour axes est représenté, dans ce système de coordonnées, par des équations qui, dans un système projectif de coordonnées, représentent un groupe métrique projectif, de sorte que : *à tout groupe projectif métrique correspond un groupe métrique admettant pour axes les lignes d'une famille donnée, satisfaisant aux axiomes* PI *et* PII.

Tout groupe métrique donne lieu à une interprétation de la théorie de la mesure, en entendant par « égalité de deux figures » leur superposabilité au moyen d'une transformation du groupe.

Les diverses notions qui interviennent dans la Géométrie ordinaire (sauf, pour le moment, les parallèles) trouvent place dans cette interprétation, et, en premier lieu, la *distance,* qui se présente comme un invariant, par rapport au groupe, d'un couple de points.

Parmi les propriétés communes aux groupes métriques, nous citerons la suivante :

Par une transformation du groupe, un point quelconque peut atteindre (transivité du groupe) tout point dont il n'est pas séparé par la surface invariante du groupe (dans les groupes projectifs : quadrique conservée ou plan de la conique conservée). Pour cette raison nous appellerons cette surface l'*infini métrique*.

La distance (définie par rapport au groupe considéré) d'un point de l'espace à un point de l'infini métrique est infinie.

Ecartant les groupes dans lesquels les transformations laissant un point fixe présentent des propriétés trop différentes de celles des rotations ordinaires autour d'un point, nous distinguerons trois catégories de groupes métriques :

Groupes *euclidiens,* transformés des groupes projectifs qui conservent une conique imaginaire située dans un plan réel ;

Groupes *riemanniens*, transformés des groupes projectifs qui conservent une quadrique imaginaire à équation réelle ;

Groupes *lobatchewskiens,* transformés des groupes projectifs qui conservent une quadrique réelle entourant la région de l'espace à laquelle s'appliquent les propositions que nous avons en vue.

Rien ne s'oppose *a priori* à ce que l'on fasse toutes combinaisons entre les diverses hypothèses possibles sur la forme des axes, la catégorie du groupe et la position dans l'espace de l'infini métrique.

C'est ainsi que l'on peut établir des métriques non-euclidiennes sur le plan, en conservant leur rôle aux lignes droites et une métrique euclidienne sur la sphère, en faisant jouer le rôle des droites par les grands cercles [1].

Groupes métriques projectifs. — Nous avons vu que les groupes métriques projectifs sont ceux dont les axes sont les droites.

Comme les propriétés géométriques résultent exclusivement des axiomes, celles des groupes métriques projectifs s'étendent forcément à tous les groupes métriques dont les axes satisfont à l'axiome PIII, pourvu toutefois que, dans l'interprétation figurée des propositions, l'on remplace les lignes droites par les axes du groupe considéré.

Mais l'attribution de la projectivité aux groupes à étudier présente l'avantage de nous permettre l'emploi légitime des termes : plan, conique, quadrique, etc., qui simplifient le discours.

Nous allons signaler les principales divergences que présentent les trois catégories de groupes métriques projectifs.

1° Le groupe est lobatchewskien.

L'infini métrique est alors constitué par un ellipsoïde enveloppant la région de l'espace à laquelle s'appliquent les propositions.

Parmi les transformations du groupe se distinguent celles dans lesquelles tous les points d'une droite restent fixes : nous les appellerons *rotations*, par généralisation de la signification de ce terme.

Dans une rotation une autre droite reste également fixe, savoir la conjuguée de l'axe de rotation par rapport à la

[1] Cf. Combebiac. *L'espace est-il euclidien? L'Enseignement mathématique*, Année 1903.

quadrique fondamentale, mais les points de cette dernière droite ne restent pas fixes, ils se déplacent sur elle, de sorte que celle-ci glisse sur elle-même.

On peut donc dire qu'à tout axe de rotation correspond un axe de glissement.

De deux droites conjuguées, l'une rencontre réellement l'infini métrique, l'autre non.

Toute transformation du groupe peut être obtenue par la succession de deux rotations effectuées respectivement autour de deux droites coujuguées, c'est-à-dire par la succession d'une rotation et d'un glissement effectués autour et le long d'une même droite.

Dans une rotation simple (qui est aussi un glissement simple), les plans passant par l'axe de glissement restent fixes, puisque chacun d'eux contient une droite fixe et un point fixe, savoir le point où il rencontre l'axe de rotation. En outre les points extérieurs à l'axe de glissement décrivent, dans les plans fixes, des coniques bitangentes à la quadrique fondamentale aux points où celle-ci est rencontrée par cet axe.

Par la répétition indéfinie d'une de ces transformations — rotation simple ou glissement simple, — les divers points de l'espace tendent vers l'un des points L de l'infini métrique communs à leurs trajectoires.

La translation lobatchewskienne d'un segment le long d'une droite ne permet pas la mesure de tous les segments de cette droite, puisque les points situés à l'extérieur de la quadrique fondamentale ne peuvent pas être atteints par le segment pris pour unité.

M. Veronèse[1] en conclut à l'existence de segments *déterminés* qui seraient infinis et à la nécessité d'introduire dans l'analyse mathématique l'idée de l'*infini actuel.*

Cette interprétation du mot « infini » en modifie complètement, à notre avis, la signification, laquelle est très précise et réside tout entière dans l'idée de la répétition indéfinie d'une opération déterminée.

[1] Veronese. *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen,* traduit de l'italien par A. Schepp; Teubner, Leipzig, 1894.

On se trouve d'ailleurs, dans le cas actuel, simplement en présence du fait très vulgaire qu'est l'existence d'une limite.

Un élément x (ici l'extrémité d'un segment sur une droite ou sa coordonnée) est déterminé par un nombre N d'opérations (ici la translation d'un segment pris pour unité).

Ce fait s'exprime en disant que x est fonction de N.

Quelle difficulté particulière trouve-t-on à concevoir que x tende vers une limite (point ou nombre) déterminée, lorsque le nombre entier N augmente indéfiniment? Toute existence de limite est réductible à un fait de cette espèce.

Dans le cas qui nous occupe, si l'on désigne par y la longueur lobatchewskienne du segment qui a pour coordonnée univoque x, l'on a

$$y = 2c \log \frac{2c - x}{2c + x},$$

fonction qui devient infinie pour les valeurs de la variable

$$x = \pm 2c.$$

2° Le groupe est riemannien.

L'infini métrique est une quadrique imaginaire à centre réel.

Deux droites conjuguées par rapport à cette quadrique ne se distinguent pas l'une de l'autre par leurs propriétés.

Les trajectoires dans une rotation (ou glissement) simple sont bitangentes à la quadrique fondamentale, mais en des points imaginaires.

Parmi les particularités qui distinguent ce groupe, nous signalerons que la translation d'un segment sur une droite, répétée un nombre fini de fois, fait atteindre l'infini, fait qui indique simplement l'impossibilité d'une telle répétition et qui, analytiquement, tient à ce que la fonction $2c \operatorname{arctang} \frac{x}{2c}$ tend vers une valeur finie, lorsque x croît indéfiniment.

3° Le groupe est euclidien.

La quadrique fondamentale est dégénérée en une conique imaginaire à plan réel.

La conjuguée d'une droite quelconque de l'espace est une droite de ce plan, de sorte que les rotations et les translations constituent des opérations se distinguant nettement les unes des autres.

Par une translation indéfiniment répétée, un point tend, comme par une translation lobatchewskienne, vers un point de l'infini métrique, mais si nous supposons rejeté à l'infini le plan de l'infini métrique, c'est-à-dire si nous supposons que l'équation de ce plan tende à être satisfaite par les coordonnées d'un point qui s'éloigne indéfiniment, l'on tombe sur la géométrie vulgaire.

Principe d'Archimède. — Sans toucher en rien à l'idée de figure, qui constitue en somme l'unique concept en dehors duquel le mot « Géométrie » perd toute signification, nous pouvons établir des « métriques » où interviennent toutes les notions auxquelles conduit l'étude de la mesure géométrique, mais où les opérations et les figures correspondantes aux propositions ne sont plus celles de la Géométrie vulgaire.

Il nous suffit, pour cela, de remplacer l'opération fondamentale de la Géométrie vulgaire qui consiste dans le « déplacement sans déformation » des figures par d'autres opérations ayant des propriétés soit identiques, soit peu différentes.

Dans chacune de ces métriques intervient une famille de lignes jouissant des propriétés attribuées aux lignes droites par les axiomes projectifs PI et PII, et chacune de ces familles peut être considérée comme la famille des axes d'une infinité de groupes métriques des trois catégories.

Nous avons vu, dans l'examen des groupes métriques projectifs, c'est-à-dire des groupes dont les axes sont les lignes droites, que, parmi eux, il n'existe pas de groupes lobatchewskiens ou riemanniens donnant lieu à la propriété ordinaire d'une translation en ce qui concerne sa répétition indéfinie.

Examinons donc, dans le cas général, les conséquences de l'admission d'un nouvel axiome, que nous énoncerons, sous le titre d'*Axiome d'Archimède*, de la manière suivante:

MIV. — *L'opération consistant à déplacer (sans déforma-*

tion) un segment sur un axe du groupe peut être continuée indéfiniment et permet d'atteindre tout point de cet axe.

Cet axiome pourrait aussi s'exprimer en disant que l'addition métrique de deux segments sur un axe jouit de la propriété archimédienne, propriété qui résulte en somme du fait que cette addition donne toujours un résultat et un seul.

Une conséquence de l'axiome MIV consiste en ce qu'un point de l'espace peut atteindre tout autre point et par suite ne peut être séparé de lui par la surface de l'infini métrique, de sorte que cet infini métrique ne peut comprendre des points *déterminés* de l'espace.

Les conséquences principales de l'axiome MIV pour les trois catégories de groupes métriques, sont les suivantes :

1° Groupe euclidien : l'espace est une variété ouverte, l'équation du plan de l'infini métrique (ou plutôt de la surface qui joue ce rôle) est vérifiée à la limite par les coordonnées d'un point qui s'éloigne indéfiniment, les axes du groupe forment une famille de lignes ouvertes et présentant la propriété de l'unicité de l'asymptotique.

2° Groupe lobatchewskien : l'espace est encore une variété ouverte, la surface qui joue le rôle de la quadrique fondamentale est composée — pour ainsi parler — des points de l'infini, et les axes sont encore des lignes ouvertes, mais ne présentant pas la propriété de l'unicité de l'asymptotique.

3° Groupe riemannien : l'espace est une variété fermée, les axes sont des lignes fermées.

Nous voyons que l'axiome d'Archimède constitue le lien entre la catégorie des groupes métriques et la forme de leurs axes.

L'admission des quatre axiomes métriques et de l'axiome PIII caractérise les groupes euclidiens dont l'infini métrique est rejeté à l'infini. Si nous employons le pluriel, c'est qu'il existe une infinité de ces groupes, chacun correspondant à une famille d'axes possédant les propriétés attribuées aux lignes droites par les axiomes projectifs, y compris l'axiome PIII.

Parmi eux se trouve le groupe qui admet pour axes les droites idéales.

Les groupes lobatchewskiens satisfaisant à l'axiome d'Archimède ne sauraient avoir pour axes les droites idéales, et c'est à la signification multiple, — parce qu'arbitraire — qui a été donnée au mot « droite » que doivent être attribués en grande partie les malentendus auxquels a donné lieu l'introduction des géométries non-euclidiennes.

Quant aux groupes riemanniens, il ne peut en exister qui satisfassent à l'axiome d'Archimède que si l'espace est une variété fermée.

Coordonnées métriques. — Supposons que l'on établisse un système de coordonnées, à la manière des systèmes employés en géométrie analytique, au moyen de trois axes rectangulaires et des distances des points de l'espace à ces axes, les axes, la rectangularité, la distance constituant des notions relatives au groupe métrique choisi.

Un tel système de coordonnées sera dit *métrique*.

Il est facile de voir que, pour les groupes euclidiens et lobatchewskiens, l'axiome MIV équivaut au suivant :

(MIV)′ *Les systèmes de coordonnées métriques sont univoques.*

Cet axiome ne peut être applicable aux groupes riemanniens que moyennant une extension de la signification du mot : « univoque ».

Sur une surface fermée, simplement connexe, on peut, en vue d'établir un système de coordonnées, tracer des lignes appartenant à deux familles différentes, telles que par tout point de la surface, il passe une ligne et une seule de chaque famille. On aura déterminé ainsi un système de coordonnées, qui ne saurait être univoque, puisque la surface est fermée, mais qui jouit des propriétés essentielles des systèmes univoques.

Ces considérations s'étendent aux variétés triples, de sorte que l'axiome (MIV)′ peut être considéré comme équivalent, à l'axiome MIV pour les groupes métriques de toutes les catégories, à la condition d'étendre, comme nous venons de l'indiquer, la signification du mot « univoque ».

Nous sommes maintenant en mesure de préciser le motif de certaines divergences que présente la question des géométries non-euclidiennes suivant le point de vue où l'on se place.

Bolyai et Lobatchewski, ainsi que ceux qui ont suivi leur voie, prenant pour point de départ les propriétés les plus *intuitives* — qu'on nous permette ce terme dont nous avons généralement évité l'emploi en raison de son imprécision —, ont admis — inconsciemment, puisque leur raisonnement est imaginatif, — des propriétés équivalentes aux axiomes métriques, c'est-à-dire aux trois axiomes de Lie et à l'axiome d'Archimède, et ont laissé de côté le postulat des parallèles au sens où il se confond avec notre axiome PIII, propriété qui a paru moins solidaire du bloc géométrique, parce que l'intuition prend du vague lorsqu'on fait appel à l'idée de l'éloignement indéfini, et d'ailleurs seule propriété fondamentale qui fût alors explicitement énoncée.

Nous avons indiqué les conséquences de ces hypothèses et montré qu'elles sont incompatibles avec les propriétés des groupes métriques projectifs, si l'on ne modifie pas la conception des lignes idéales appelées « droites ». C'est uniquement au maintien de ce mot pour désigner des conceptions différentes que sont dues les dissertations scholastiques sur la « forme », la « nature », la « structure » de l'espace, expressions qui présentent sans doute une signification claire pour les personnes qui les emploient.

Quant aux analystes, dont Riemann, Helmholtz, Cayley, Sophus Lie, pour ne citer que les plus illustres, leur généralisation porte sur la notion de déplacement ou celle de distance, qui la représente. Dans ces conditions, surtout si un point n'est rien autre qu'un ensemble de trois coordonnées, ni l'axiome d'Archimède ni celui de l'unicité de l'asymptotique ne s'imposent. Les systèmes de coordonnées projectifs permettant de représenter très simplement les diverses métriques, on était conduit à donner au postulat des parallèles une signification purement métrique sans relation avec la forme des axes du groupe considéré. Aussi les analystes se sont-ils surtout attachés aux cas des groupes métriques projectifs.

Définition de la ligne droite. — Une ligne droite est déterminée *(parmi les lignes droites)* par la connaissance de deux de ses points.

Cette propriété ne saurait constituer une définition des lignes droites, et nous avons vu qu'il existe une infinité de familles de lignes qui présentent toutes les propriétés de la famille des droites intervenant dans les démonstrations géométriques et qui sont susceptibles de donner lieu à des doctrines ne différant de la Géométrie ordinaire que par les figures correspondantes aux diverses propositions.

Pourtant la proposition ci-dessus, suppression faite des mots entre parenthèses, a été prise parfois comme définition de la ligne droite.

Cette façon de voir s'explique, si elle ne se justifie pas, par la confusion en vertu de laquelle l'intuition privée de critique a incorporé l'idée métrique (basée sur celle de figure indéformable) dans l'idée de figure, alors que, dans la conception analytique, plus consciente et mieux informée, cette dernière est la seule idée essentielle de la Géométrie, la seule en dehors de laquelle le mot « géométrique » ne peut recevoir qu'une signification arbitraire.

La ligne droite est la seule ligne qui soit *covariante* (pour ainsi s'exprimer, en étendant la signification de ce terme emprunté à la théorie des formes algébriques) d'un couple de points dans tous les déplacements sans déformation, puisque c'est la seule ligne qui reste fixe dans ceux de ces déplacements qui laissent fixe le couple.

On peut donc dire que la ligne droite est la seule ligne qui soit déterminée par deux points et par l'idée de déplacement sans déformation. Mais nous avons vu que cette idée est restée incorporée dans l'idée géométrique elle-même avec une telle force de cohésion que personne n'a songé, avant l'immortel rationaliste Helmholtz, à la dégager explicitement des concepts synthétiques où elle était latente.

L'idée vulgaire, suivant laquelle la ligne droite *est déterminée par deux de ses points*, est donc légitime suivant la conception dans laquelle l'idée de déplacement fait partie intégrante de l'idée géométrique, c'est-à-dire dans laquelle les propriétés métriques d'une figure sont des propriétés « intrinsèques » de cette figure.

L'explication de ces associations d'idées est d'ailleurs évidente, si l'on admet l'origine empirique des idées, théorie féconde, magistralement établie par Helmholtz [1] et lumineusement développée par Taine [2]: n'avons-nous pas en effet acquis l'habitude de considérer l'*identité* de la plupart des objets comme non affectée par leur déplacement?

CONCLUSION. — Les notions *non définies* mises en œuvre dans les traités classiques de géométrie peuvent être réduites à deux concepts : celui de figure (comprenant les concepts de point, ligne, surface, continuité) et celui de déplacement d'une figure invariable.

Les propriétés de ces concepts interviennent dans les démonstrations classiques par le procédé que nous avons appelé le *raisonnement imaginatif*, à l'exception de la propriété des lignes droites exprimée par le postulat des parallèles, qui constitue ainsi le seul axiome explicitement énoncé.

Les résultats de l'examen critique auquel nous avons procédé peuvent être résumés de la manière suivante :

Les quatre axiomes métriques (les trois de Lie et celui d'Archimède) particularisent les déplacements d'une figure invariable parmi les *transformations ponctuelles*, de sorte que l'on peut, tout en réservant la possibilité de pousser plus loin l'analyse, fonder la Géométrie sur les seuls concepts de *figure* et de *transformation ponctuelle*.

Toutes les propriétés géométriques découlent de l'axiome AI, des quatre axiomes métriques et de l'axiome PIII, par lequel est représenté le postulat des parallèles, de sorte que tous les groupes de transformations ponctuelles satisfaisant à ces axiomes (l'énoncé de l'axiome PIII étant libellé de manière à viser les axes des groupes métriques et non pas seulement les lignes droites) donnent lieu à des propriétés susceptibles d'être exprimées par les diverses propositions de la Géométrie, pourvu que l'on modifie convenablement la signification des mots : égalité, droite, perpendiculaire, etc.

---

1 HELMHOLTZ. *Optique physiologique.*

2 TAINE. *De l'Intelligence.*

L'on obtient encore des métriques, mais pouvant différer plus ou moins de la métrique ordinaire, en laissant de côté les axiomes MIV et PIII, c'est-à-dire en prenant pour base de l'*égalité géométrique* un groupe métrique quelconque, savoir un groupe satisfaisant aux trois axiomes de Lie.

Dans une telle métrique, un rôle important est joué par une famille de lignes (axes du groupe métrique) présentant les propriétés attribuées aux droites par les axiomes PI et PII, et réciproquement, à toute famille de lignes jouissant de ces propriétés on peut faire correspondre une infinité de métriques.

L'on peut choisir notamment pour axes les lignes droites idéales, et alors les groupes métriques correspondants sont projectifs.

Mais, dans le cas où l'on admet l'axiome d'Archimède, il y a relation étroite entre la catégorie du groupe (euclidien, lobatchewskien ou riemannien) et celle de la famille des axes (lignes ouvertes présentant ou non la propriété de l'unicité de l'asymptotique et lignes fermées). Dans le cas du groupe riemannien, l'espace lui-même est une variété fermée.

Terminons en émettant le vœu qu'il en soit fini avec le caractère déconcertant qu'a pris la question des Géométries non-euclidiennes, caractère si opposé à l'esprit scientifique. Il suffirait pour cela que les gens raisonnables (et l'on doit comprendre parmi eux tous les mathématiciens) veuillent bien éviter l'emploi des mots : Géométries non-euclidiennes, espace, plans, droites non-euclidiens, alors qu'il s'agit simplement de *métriques* non-euclidiennes et de familles de surfaces ou de lignes ayant des propriétés communes avec les plans et les droites.

Si cette étude pouvait contribuer à ce résultat, nous nous féliciterions de l'avoir entreprise.

G. Combebiac (Limoges).