Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 6 (1904)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA DÉCOMPOSITION EN CARRÉS DES FORMES QUADRATIQUES

Autor: Laurent, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7573

SUR LA DÉCOMPOSITION EN CARRÉS

DES FORMES QUADRATIQUES

On fait connaître dans les ouvrages classiques, deux et quelquefois trois méthodes pour la décomposition des formes quadratiques en carrés. L'une que l'on appelle quelquefois méthode de Gauss, on ne sait pas pourquoi, consiste à former des carrés contenant l'un une, le second deux... variables, cette méthode a l'avantage de ne pas introduire d'irrationnelles, mais elle est d'une application aussi rebutante que la recherche d'un plus grand commun diviseur ou que l'ancienne intégration par parties.

Une autre méthode est connue sous le nom de méthode de l'équation en s, elle n'a qu'un intérêt théorique, quant à la troisième qui réduit simultanément deux formes, on peut lui adresser les mêmes critiques.

Enfin il y a bien encore une méthode très générale qui consiste à identifier les deux membres de la formule

$$\Sigma a_{ij}\, x_i x_j = \Sigma(\alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \ldots + \alpha_{in} x_n)^2$$

Celle-là, personne, je crois, n'a songé à l'appliquer.

Hé bien, il existe une méthode très simple qui a l'avantage de fournir une infinité de décompositions sans introduire d'irrationnelles. Pour exposer cette méthode nous représenterons la forme $\Sigma a_{ij}\, x_i x_j$ par le tableau de ses coefficients ainsi :

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Une forme qui se réduit à

$$\begin{vmatrix} a_{11} & o & o & o \\ o & a_{22} & o & o \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & o & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

est une somme de carrés $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots$ Pour ramener une forme à une somme de carrés, il suffira donc de donner au tableau qui la représente la forme qui précède.

Voyons la modification qu'une substitution linéaire telle que

$$x'_i = x_i + \lambda x_j$$

introduit dans le tableau (1) ; $\Sigma a_{ij} x'_i x'_j$ devient

$$\Sigma a_{ij} x_i x_j + 2\lambda x_j (a_{1j} x_1 + \dots a_{nj} x_n) + a_{ii} \lambda^2 x_j^2 \quad ;$$

or le tableau représentatif de cette nouvelle forme s'obtient simplement en ajoutant aux éléments de la 1re ligne et de la i^e colonne, ceux de la j^e ligne et de la j^e colonne multipliées par λ. Si à cette remarque on ajoute encore la suivante, qu'en échangeant les lignes de rang i et j, on ne fait que remplacer dans la forme x_i par x_j et vice-versà, on voit que l'on peut effectuer sur le tableau (1) les opérations qui n'altèrent pas un déterminant à la condition que ces opérations faites sur les lignes et les colonnes soient répétées sur les colonnes et les lignes, et, en faisant cela, on ne fait qu'effectuer une substitution linéaire.

Je vais faire quelques applications des principes précédents.

1° Je suppose que l'on demande la nature de la surface représentée par l'équation

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4yz + 2xz - 4xy = 1.$$

Le premier membre s'écrit symboliquement

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} ;$$

on remplace ce tableau, successivement par

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

et on voit que par une substitution linéaire et homogène on ramène la surface à la forme

$$x^2 - 6y^2 + z^2 = 1 \ ;$$

elle est donc un hyperboloïde à une nappe.

2° Résoudre l'équation

$$x^2 + 2px + q = 0 \ .$$

On décompose le premier membre en carrés, il s'écrit symboliquement

$$\begin{vmatrix} 1 & p \\ p & q \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q - p^2 \end{vmatrix}$$

ou

$$X^2 + q - p^2 = 0$$

et $x = X - p$, la résolution en découle.

N. B. — Il est bon d'observer que les transformations que nous faisons subir à une forme n'altèrent pas son discriminant.

H. Laurent (Paris).