

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 6 (1904)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Kapitel:** propos d'un théorème sur le triangle.

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## CORRESPONDANCE

### A propos d'un théorème sur le triangle.

Le théorème de M. Kariya publié dans notre numéro de mars, qui nous a déjà valu d'intéressantes remarques publiées en mai, vient de nous en procurer encore d'autres que nous publions ci-après, du moins quant à ce qu'elles contiennent de nouveau.

IV. — M. Pierre FAURE (Paris) d'une part, et M. HOUSSAIS (Roanne) d'autre part, nous envoient une démonstration analogue

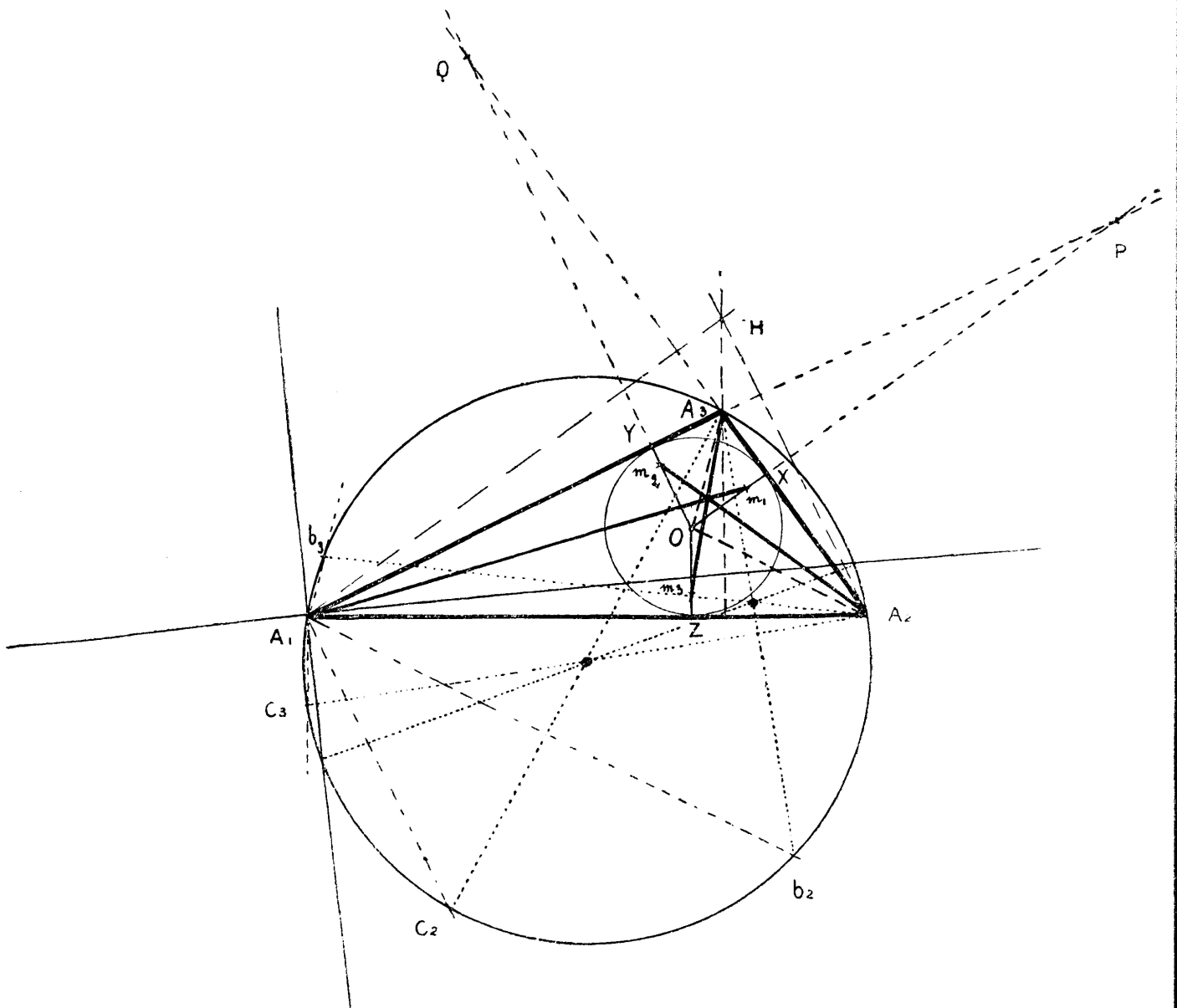


Fig. 1.

à celle de MM. Cantoni et Demoulin, publiée page 236, mais ils étudient de plus la conique  $\Gamma$  qu'ils montrent être une hyperbole équilatère, résultat signalé aussi par M. Cantoni. M. Faure ajoute une construction de cette courbe que nous reproduisons. Pour les notations, on comparera la nouvelle figure avec celle de la page 236.

Cherchons la direction des asymptotes de cette conique  $\Gamma$  ; pour cela, traçons un cercle passant par  $A_1$ , par exemple le cercle circonscrit au triangle  $A_1 A_2 A_3$ , et menons par  $A_1$  des parallèles à trois couples de rayons homologues des faisceaux  $(A_2 m_2)$  et  $(A_3 m_3)$  ; les rayons doubles des deux faisceaux de sommet  $A_1$  ainsi formés, seront parallèles aux asymptotes cherchées.

Choisissons pour déterminer les deux faisceaux, les trois couples suivants :

$A_1 A_2$  et son homologue  $A_1 A_3$  ;

$A_1 b_2$  et  $A_1 b_3$  parallèles aux bissectrices intérieures du triangle en  $A_2$  et  $A_3$  ;

$A_1 c_2$  et  $A_1 c_3$  parallèles aux hauteurs du triangle relatives aux sommets  $A_2$  et  $A_3$ .

Pour obtenir les rayons doubles, il suffit de joindre le point  $A_1$  aux points d'intersection du cercle et de la droite qui joint les points de concours de  $A_2 b_3$  avec  $A_3 b_2$  et de  $A_2 c_3$  avec  $A_3 c_2$ .

Les angles  $c_3 A_1 A_2$  et  $c_2 A_1 A_3$  étant droits par construction, les droites  $A_2 c_3$  et  $A_3 c_2$  se coupent au centre du cercle, et la droite qui détermine les rayons doubles passe aussi par ce centre. Donc, les parallèles aux asymptotes sont rectangulaires entre elles ; par suite, la conique, lieu du "point de Kariya" est une hyperbole équilatère passant par les points  $A_1 A_2 A_3 O$ .

Il est facile de construire le centre de cette hyperbole : c'est le point commun aux quatre cercles des neuf points qui correspondent aux quatre triangles formés par les points  $A_1 A_2 A_3 O$  pris trois à trois.

P. FAURE (Paris).

V. — M. G. FRANKE nous écrit :

M. E. Jahnke a bien voulu fixer mon attention sur la note que M. Kariya a publiée dans l'*Enseignement mathématique*.

En l'étudiant, j'ai trouvé d'abord qu'on peut remplacer sans aucune difficulté dans le calcul du mathématicien japonais le centre du cercle inscrit par les centres des cercles ex-inscrits<sup>1</sup> pour trouver trois autres points de Kariya.

Ces recherches m'ont fait établir un nouveau point remarquable du triangle.

Tandis que le point de M. Kariya est lié au centre du cercle

<sup>1</sup> Cette remarque relative aux cercles ex-inscrits nous a été également signalée par M. HOUSSAIS.

inscrit, j'ai obtenu le nouveau point en partant du cercle circonscrit, et ce qui me paraît intéressant, c'est que ce point est situé sur la droite d'Euler.

Soit  $M$  le centre du cercle circonscrit au triangle  $A_1 A_2 A_3$ , soient  $MD_1, MD_2, MD_3$  les perpendiculaires abaissées de  $M$  sur les côtés de ce triangle. Prenons sur ces droites trois points  $M_1, M_2, M_3$  tels que

$$(1) \quad \frac{MM_1}{MD_1} = \frac{MM_2}{MD_2} = \frac{MM_3}{MD_3} = \frac{m}{n}.$$

Je vais démontrer que les trois transversales  $A_1 M_1, A_2 M_2$  et  $A_3 M_3$  se coupent en un point  $P$  situé sur la droite d'Euler.

En effet, supposons d'abord que les trois transversales ne coupent pas  $HM$  en un seul point  $P$ , mais en trois points  $P_1, P_2, P_3$ .

On aurait

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{P_1 M}{P_1 H} = \frac{MM_1}{A_1 H}, \\ \frac{P_2 M}{P_2 H} = \frac{MM_2}{A_2 H}, \\ \frac{P_3 M}{P_3 H} = \frac{MM_3}{A_3 H}. \end{array} \right.$$

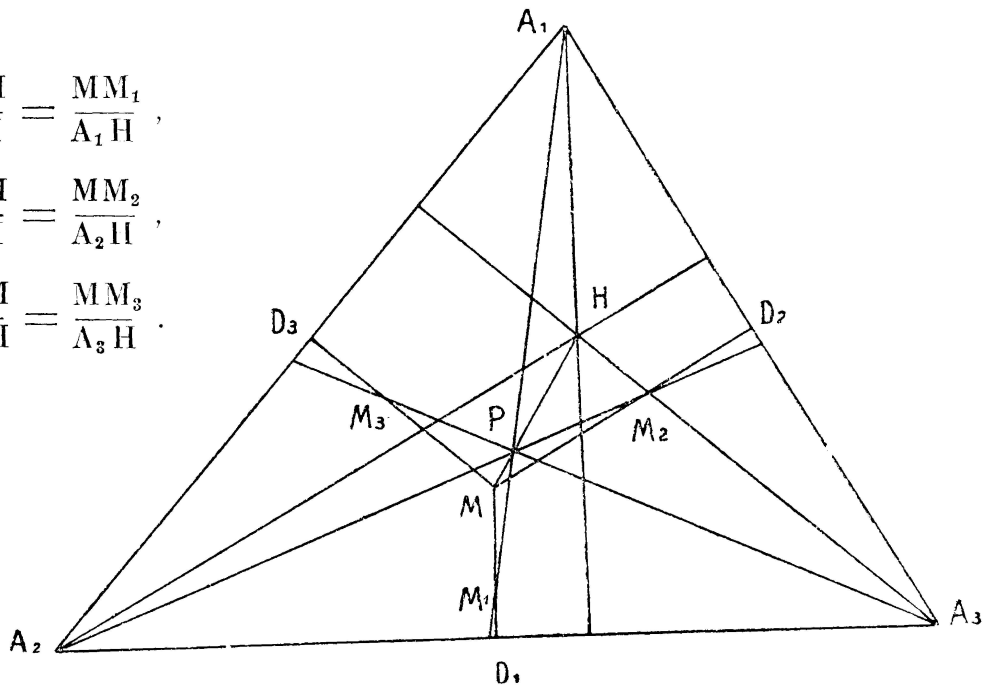


Fig. 3.

D'autre part, d'après un théorème élémentaire, on sait que

$$A_1 H = 2MD_1; \quad A_2 H = 2MD_2; \quad A_3 H = 2MD_3.$$

En combinant avec (1) on trouve

$$\frac{MM_1}{A_1 H} = \frac{MM_2}{A_2 H} = \frac{MM_3}{A_3 H}.$$

C'est pourquoi il suit de (2)

$$\frac{P_1 M}{P_1 H} = \frac{P_2 M}{P_2 H} = \frac{P_3 M}{P_3 H}.$$

Aussi les trois points  $P_1, P_2, P_3$  tombent-ils en un seul point  $P$ .



La démonstration est identique à celle indiquée dans le cas particulier où  $H$  est le point de concours des hauteurs du triangle.

Il est évident que dans ce cas général, les droites  $AF$  et  $AE$ ,  $BD$  et  $BF$ ,  $CE$  et  $CD$  ne seront pas des couples de droites isogonales.

E. CANTOXI (Viadana, Mantova).

VII. — M. CANTOXI, ayant reçu les épreuves de ce qui précède, en a tiré encore quelques réflexions que nous résumons comme suit :

a) Relativement à la note de M. Faure, on peut observer que la direction des asymptotes de l'hyperbole  $\Gamma$  peut s'obtenir encore plus simplement. Soit  $O$  le centre du cercle inscrit au triangle

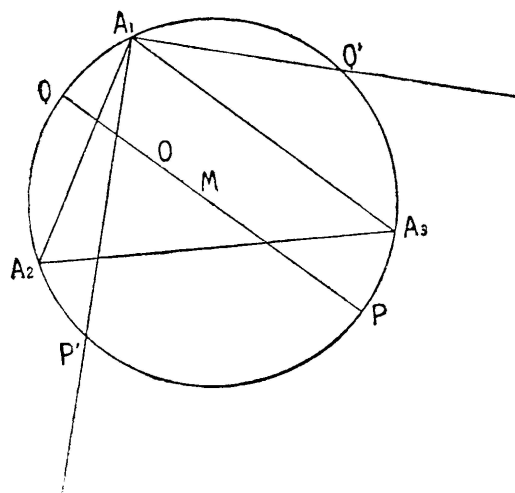


Fig. 4.

$A_1A_2A_3$ ,  $M$  le centre du cercle circonscrit, et tirons par  $O$  et  $M$  un diamètre  $PQ$ .

Prenons maintenant sur le cercle circonscrit des arcs

$$A_2P' = A_3P, \quad A_3Q' = A_2Q,$$

$A_1P'$  et  $A_1Q'$  sont les directions cherchées.

L'hyperbole  $\Gamma$  est une transformée arguésienne du diamètre  $PQ$ .

b) Quant au théorème de M. Franke, il peut se démontrer de même que celui de M. Kariya. Reprenons la figure accompagnant

le texte de M. Franke et les notations de celui-ci. Quand le rapport  $m:n$  varie sur les droites  $MD_2$ ,  $MD_3$ , les droites tirées de  $A_2$  et  $A_3$  aux points  $M_2$  et  $M_3$  engendrent des faisceaux projectifs. Le lieu des points tels que  $P$  est alors en général une conique qui, bien entendu, peut dégénérer. Or, ici nous connaissons manifestement trois points du lieu, car le centre  $M$  du cercle circonscrit au triangle, le barycentre et l'orthocentre de ce dernier correspondent respectivement aux valeurs  $0$ ,  $\infty$ ,  $1$  du rapport  $m:n$ . D'après le théorème d'Euler, ces trois points sont sur une même droite qui est le lieu déterminé finalement par M. Franke.

Et encore toutes ces considérations peuvent-elles rentrer dans quelque chose de plus général.

Considérons le triangle  $A_1A_2A_3$ , les médianes dont les pieds seront  $D_1D_2D_3$ . Les triangles  $A_1A_2A_3$ ,  $D_1D_2D_3$  ont même barycentre  $G$ . Prenons un point quelconque  $H$  dans  $A_1A_2A_3$  et tirons  $HG$ , qui coupe  $A_2A_3$  en  $P$  et  $D_2D_3$  en  $Q$ . Menons par  $D_1D_2D_3$  des droites respectivement parallèles à  $A_1H$ ,  $A_2H$ ,  $A_3H$ ; elles se cou-

pent en un point M disposé dans  $D_1D_2D_3$  comme H dans  $A_1A_2A_3$ , si bien que H, G, M sont évidemment en ligne droite. Si maintenant l'on prend des points  $M_1, M_2, M_3$  (non marqués sur la figure) respectivement sur  $MD_1, MD_2, MD_3$ , de telle sorte que

$$\frac{MM_1}{D_1M_1} = \frac{MM_2}{D_2M_2} = \frac{MM_3}{D_3M_3},$$

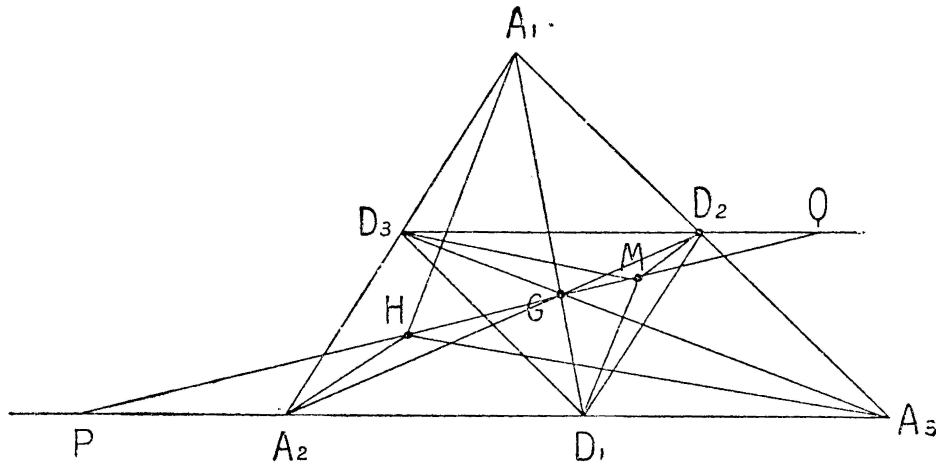


Fig. 5.

les trois transversales  $A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3$  auront toujours un point de concours situé sur HGM.

Si H devient l'orthocentre, M devient le centre du cercle circonscrit.

E. CANTONI (Viadana, Mantova).