

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1904)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES RACINES DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES
Autor: Zervos, P.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-7565>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LES RACINES DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES

1. THÉORÈME. — *Si dans un polynome entier avec tous ses termes positifs, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x , le rapport d'un coefficient au précédent ne va pas en croissant, l'équation qu'on a en égalant le polynome à zéro a nécessairement des racines imaginaires.*

Soit l'équation :

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m = 0 .$$

En posant

$$\frac{a_1}{a_0} = \lambda_1, \frac{a_2}{a_1} = \lambda_2, \dots, \frac{a_m}{a_{m-1}} = \lambda_m,$$

l'équation proposée devient :

$$x^m + \lambda_1 x^{m-1} + \lambda_1 \lambda_2 x^{m-2} + \dots + \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m = 0 .$$

Si cette équation avait toutes ses racines négatives, nous pourrions poser l'équation donnée sous la forme :

$$(x + a)(x + b) \dots (x + u) = 0 \quad \text{où} \quad a > 0, b > 0, \dots, u > 0 .$$

Mais

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab = x^2 + \mu_1 x + \mu_1 \mu_2 ,$$

où, évidemment, nous avons $\mu_1 > \mu_2$ et par suite

$$\begin{aligned} (x + a)(x + b)(x + c) &= x^3 + (\mu_1 + c)x^2 + \mu_1(\mu_2 + c)x + \mu_1 \mu_2 c \\ &= x^3 + \eta_1 x^2 + \eta_2 x + \eta_3 \end{aligned}$$

en posant

$$\eta_1 = \mu_1 + c, \quad \eta_2 = \frac{\mu_1(\mu_2 + c)}{\mu_1 + c}, \quad \eta_3 = \mu_2 \frac{c}{\mu_2 + c} .$$

Mais, puisque $\mu_1 > \mu_2$, nous aurons $\eta_1 > \eta_2 > \eta_3$.

D'une manière générale, si l'on multiplie un polynome de la forme

$$x^{m-1} + \rho_1 x^{m-2} + \rho_1 \rho_2 x^{m-3} + \dots + \rho_1 \rho_2 \dots \rho_{m-1},$$

où $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3 \dots > \rho_{m-1} > 0$, par $x + k$, où $k > 0$, dans le produit, que nous pouvons écrire sous la forme

$$x^m + \lambda_1 x^{m-1} + \lambda_1 \lambda_2 x^{m-2} + \dots + \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m,$$

nous aurons

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \dots > \lambda_m.$$

En effet, le produit sera

$$x^m + (\rho_1 + k)x^{m-1} + \rho_1(\rho_2 + k)x^{m-2} + \dots + \rho_1 \rho_2 \dots \rho_m k,$$

d'où nous déduisons

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \rho_1 + k, \\ \lambda_2 &= \rho_1 \frac{\rho_2 + k}{\rho_1 + k}, \\ &\dots \dots \dots \\ \lambda_{n-1} &= \rho_{n-2} \frac{\rho_{n-1} + k}{\rho_{n-2} + k}, \\ \lambda_n &= \rho_{n-1} \frac{\rho_n + k}{\rho_{n-1} + k}. \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Comparons les rapports λ_{n-1} , λ_n . Remarquons que

$$\lambda_{n-1} = \frac{\rho_{n-2}(\rho_{n-1} + k)(\rho_{n-1} + k)}{(\rho_{n-2} + k)(\rho_{n-1} + k)} \quad \text{et} \quad \lambda_n = \frac{\rho_{n-1}(\rho_n + k)(\rho_{n-2} + k)}{(\rho_{n-1} + k)(\rho_{n-2} + k)}.$$

En rappelant que $\rho_{n-2} > \rho_{n-1} > \rho_n$ nous trouvons l'inégalité

$$\rho_{n-2} k + \rho_{n-2} \rho_{n-1} > \rho_{n-1} k + \rho_{n-2} \rho_{n-1},$$

d'où

$$\rho_{n-2}(\rho_{n-1} + k)(\rho_{n-1} + k) > \rho_{n-1}(\rho_{n-2} + k)(\rho_{n-1} + k)$$

et par conséquent

$$\lambda_{n-1} > \lambda_n. \qquad \text{C. q. f. d.}$$

2. — Soit l'équation :

$$f(x) = a_{2m} - a_{2m-1} x + a_{2m-2} x^2 - \dots + a_0 x^{2m} = 0$$

où a_0, a_1, a_{2m} sont positifs.

Posons

$$\frac{-a_{2m-1}}{a_{2m}} = \lambda_1,$$

$$\frac{a_{2m-2}}{-a_{2m-1}} = \lambda_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

L'équation donnée s'écrit encore ainsi :

$$1 + \lambda_1 x + \lambda_1 \lambda_2 x^2 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 x^3 + \dots + \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{2m} x^{2m} = 0.$$

Soit λ_{2n} le plus petit en valeur absolue des $\lambda_2, \lambda_4, \dots, \lambda_{2m}, \lambda_{2\rho-1}$ le plus grand en valeur absolue des $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5, \dots, \lambda_{2m-1}$. On peut dire que toutes les racines positives de $f(x)$ sont plus petites que $-\frac{1}{\lambda_{2n}}$ et plus grandes que $-\frac{1}{\lambda_{2\rho-1}}$.

En effet, quand $x > -\frac{1}{\lambda_{2n}}$, nous avons, d'après nos hypothèses

$$x > -\frac{1}{\lambda_2}, x > -\frac{1}{\lambda_4}, \dots, x > -\frac{1}{\lambda_{2m}} \text{ ou } |\lambda_2 x| > 1, |\lambda_4 x| > 1, \dots, |\lambda_{2m} x| > 1$$

et, par suite, le troisième terme du polynome $f(x)$ est plus grand que le second pris en valeur absolue, le cinquième est plus grand que le quatrième, etc., parce que le rapport d'un terme au précédent est plus grand que l'unité.

Et quand $0 < x < \frac{1}{|\lambda_{2\rho-1}|}$, nous avons

$$x < \frac{1}{|\lambda_1|}, x < \frac{1}{|\lambda_3|}, \dots, x < \frac{1}{|\lambda_{2m-1}|}$$

et par suite les termes négatifs deviennent plus petits que les termes positifs qui les précèdent, et par conséquent $f(x) > 0$.

Corollaire. — Si dans le précédent polynome nous avons $\lambda_{2\rho-1} > \lambda_{2n}$ il n'y aurait aucune racine positive.