Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 6 (1904)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA DÉRIVATION DES SÉRIES UNIFORMÉMENT CONVERGENTES

Autor: Godefroy, Maurice

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7564

SUR LA DÉRIVATION DES SÉRIES UNIFORMÉMENT CONVERGENTES

Une série convergente de fonctions dérivables dans un intervalle donné est elle-même dérivable dans cet intervalle, si la série formée par les dérivées des termes y est uniformément convergente ; la somme de cette dernière série est alors la dérivée de la somme de la première série. Cette importante proposition, dont l'usage est si varié, est démontrée au moyen du Calcul intégral dans la plupart des Traités d'Analyse publiés en France, même les plus récents [1].

Bien qu'absolument rigoureuse, une telle manière de faire ne me semble pas donner pleine satisfaction à l'esprit. Et, en effet, n'est-il pas quelque peu contraire à la logique de passer par le détour des intégrales définies pour arriver à un résultat relatif à des dérivées. De plus, la notion d'intégrale étant étudiée, en général, bien après celle de dérivée, le théorème en question se trouve rejeté hors de sa place naturelle, ce qui retarde son application d'une manière regrettable.

Il est cependant possible de remédier à cet inconvénient au moyen d'un procédé simple et rigoureux indiqué par M. Stolz dans son bel Ouvrage : *Grundzüge der Differential- und Integralrechnung* (p. 64-72) [2]. La présente Note a pour but

---

[1] Nous citerons entre autres ceux de M. Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, t. I, p. 409-411 et de M. G. Humbert, *Cours d'Analyse professé à l'Ecole polytechnique*, t. I, p. 323-324. M. Humbert paraît croire que « la question de la dérivation des séries est liée » à celle de l'intégration. Par contre, dans la *Théorie nouvelle des fonctions* de Robin, publiée dernièrement par M. Raffy, p. 136-139, une façon de voir toute différente est adoptée. Mais les dées de Robin sont encore loin d'avoir pénétré dans l'Enseignement.

[2] Le procédé de Stolz est fondé, comme on va le constater, sur l'emploi de la formule des accroissements finis. C'est également à ce point de vue que se sont placés Robin dans sa *Théorie nouvelle des fonctions*, p. 138-139, M. Cesaro dans ses *Elementi di Calcolo infinitesimale*, p. 60-61, et M. Porter, dans les *Annals of Mathematics*, 2e série; t. III, 1901-1902, p. 19-20. Ce dernier n'a considéré que le cas particulier, d'ailleurs usuel, où la convergence uniforme de la série des dérivées résulte de sa comparaison à une série positive convergente (critère de Weierstrass) ; la démonstration sa présente alors sous une forme tout à fait élémentaire.

de faire connaître la méthode suivie par cet auteur, sauf quelques modifications introduites dans la forme des raisonnements.

Soit

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

une série dont les termes sont dérivables dans un intervalle (a,b); si, dans ce même intervalle, la série formée par les dérivées de ses termes

$$f'(x) = S'_n(x) + R'_n(x)$$

est uniformément convergente, il existe un entier m tel qu'à partir de $n = m$, on ait pour toute valeur de x appartenant à l'intervalle (a, b)

$$| R'_n(x) | < \frac{\sigma}{6}.$$

Soient maintenant

$$T_p(x) = R_m(x) - R_{m+p}(x),$$
$$T'_p(x) = R'_m(x) - R'_{m+p}(x);$$

pour deux valeurs x et x_0 de la variable, intérieures à l'intervalle (a,b), la différence

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$$

peut se mettre sous la forme

$$\frac{T_p(x) - T_p(x_0)}{x - x_0} + \frac{S_m(x) - S_m(x_0)}{x - x_0}$$
$$- S'_m(x_0) + \frac{R_{m+p}(x) - R_{m+p}(x_0)}{x - x_0} - R'_m(x_0);$$

mais

$$\frac{T_p(x) - T_p(x_0)}{x - x_0} = T'_p(x_0 + \theta\overline{x - x_0}), \qquad 0 < \theta < 1,$$

et, de la condition

$$| T'_p(x) | \leqq | R'_m(x) | + | R'_{m+p}(x) | < \frac{2\sigma}{6},$$

il résulte, pour toute valeur finie de p,

$$-\frac{2\sigma}{6} < \frac{T_p(x) - T_p(x_0)}{x - x_0} < \frac{2\sigma}{6}.$$

D'autre part, il existe un nombre positif ρ tel que, pour toute valeur de x autre que x_0, vérifiant la double inégalité

$$-\rho < x - x_0 < \rho,$$

on ait

$$S'_m(x_0) - \frac{\sigma}{6} < \frac{S_m(x) - S_m(x_0)}{x - x_0} < S'_m(x_0) + \frac{\sigma}{6};$$

mais, à chaque valeur de x différente de x_0 appartenant à l'intervalle (a, b), il correspond une valeur finie de p suffisamment grande pour que les inégalités

$$|R_{m+p}(x)| < \frac{\sigma}{6}|x - x_0|,$$

$$|R_{m+p}(x_0)| < \frac{\sigma}{6}|x - x_0|$$

soient vérifiées, de sorte qu'en définitive la double inégalité

$$-\rho < x - x_0 < \rho$$

entraîne la suivante

$$f'(x_0) - \sigma < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < f'(x_0) + \sigma.$$

La dérivée de $f(x)$ pour une valeur x_0 de x intérieure à l'intervalle (a, b) est donc $f'(x_0)$; de plus, on reconnaît facilement que, pour $x = a$, la fonction $f(x)$ admet une dérivée à droite égale à $f'(a)$ et que, pour $x = b$, elle admet une dérivée à gauche égale à $f'(b)$; la fonction $f(x)$ est, par suite, dérivable dans l'intervalle (a, b), sa dérivée y étant égale à $f'(x)$.

Maurice Godefroy (Marseille).