Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 5 (1903)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PHILOLOGUES ET PSYCHOLOGUES EN FACE DU PROBLÈME DES PARALLÈLES (1)

Autor: Baron, Raoul

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-6633

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

PHILOLOGUES ET PSYCHOLOGUES

EN FACE DU PROBLÈME DES PARALLÈLES [1]

PREMIÈRE PARTIE

Contributions philologiques à l'étude des parallèles.

Les parallèles n'ont pas été ainsi nommées parce qu'elles sont incapables de se rencontrer, si loin qu'on les prolonge. Leur nom, et du même coup leur définition, indiquent qu'elles font avec une transversale des angles alternes égaux. On en déduit l'égalité ou la supplémentarité des autres angles.

On considère comme cas particulier les 2 droites perpendiculaires à une troisième.

Une fois ces déductions prochaines établies, on passe de l'hypothèse à la construction effective, en remarquant précisément la différence entre les parallèles définies par la non-rencontre et les parallèles définies par le sens étymologique pur et direct. Deux segments rectilignes qui se coupent par le milieu donnent la clef de la construction cherchée, de sorte que les deux parallèles se trouvent *d'emblée* obtenues, sans postuler la transformation progressive des droites sécantes ou non sécantes (cela est très important.) En vertu de l'axiome qui déclare que *deux droites*

---

[1] Sous ce titre, notre distingué collaborateur M. Raoul Baron nous avait présenté un manuscrit un peu trop étendu pour pouvoir trouver place utilement dans *L'Enseignement Mathématique*. Sur la prière de la Rédaction, il l'a réduit, peut-être en y mettant cette fois un peu trop de réserve. Malgré cette brièveté, les lecteurs seront assurément intéressés par la thèse de l'auteur; elle est nouvelle, originale, et à notre avis d'une profonde justesse.

NOTE DE LA RÉDACTION.

ne peuvent se couper qu'en un point, on démontre que les parallèles ne se rencontrent nulle part, puisqu'elles se rencontreraient en deux points symétriques, après une demi-rotation du système autour du point médian de la transversale incluse.

C'est une erreur historique que de prendre comme théorème fondamental celui-ci : « Quand deux droites sont parallèles, elles font avec une transversale des angles alternes égaux, etc... » Et l'on souligne l'erreur en disant : « *Réciproquement*, si deux droites font avec une transversale des angles... ces droites sont parallèles ». — C'est cela au contraire qui est le point de départ, et qui se démontre immédiatement sans postulat. Le *desideratum* euclidien gît en ceci, savoir : que l'on peut conclure du parallélisme à la non rencontre, tandis que l'on ne peut pas se donner *a priori* des droites non-sécantes pour en conclure à leur parallélisme (étymologiquement parlant).

La linguistique ne se borne pas à des réformes. Elle condamne encore la dénaturation du mot *asymptote* et l'hypothèse gratuite de *deux droites se rencontrant à l'infini sans se couper*. Il y a dans tout ce langage un parti pris d'embrouiller les questions ! Etymologiquement, deux lignes sont « asymptotes », lorsqu'elles ne tombent pas l'une sur l'autre. Asymptote est composé de *symptote* et de *a* privatif. Le prétendu *postulatum* d'Euclide, en réalité son *desideratum*, consiste à savoir si la parallèle propre jouit du monopole de l'asymptotisme propre. En d'autres termes : « Par un point pris en dehors d'une droite, on ne peut mener qu'*une* parallèle » ; mais il n'est pas prouvé du même coup que la parallèle dérangée de sa position *unique va rencontrer* l'autre droite.

Réservant pour la partie philosophique ce second point, je me borne à chercher comment nous pourrions exprimer le Lieu de la *première rencontre*, entre deux droites qui *tout d'abord ne se rencontraient pas* ?

Pouvons-nous supposer avec Lobatscheffsky que, entre la sécante et la non sécante, il y a une position limite commune qui est une simple rencontre, ou un asymptotisme intermédiaire entre couper et ne pas couper une droite ? — Mais où cela a-t-il lieu ? — A l'infini ? mais l'INFINI n'est pas un LIEU et *à l'infini* n'est pas une locution adverbiale de lieu !

Dira-t-on, avec certain apôtre de la néo-géométrie, « que deux droites qui se rencontrent *au bord du plan*, se rencontrent précisément à l'infini, sans se couper ? » Mais le plan n'a pas de bord. — Reprenons la preuve à rebours et voyons comment deux droites sécantes pourraient devenir non sécantes en passant par une position limite commune entre les deux états.

Par une incorrection nouvelle les non-euclidiens diront que l'on chasse le point de rencontre *à l'infini* et qu'il s'évanouit *en cet endroit ? ? ?*

Le grammairien analyste ne peut tolérer ce puéril jeu de mots : « Vous chassez un point à l'infini... » Cela signifie que vous répétez indéfiniment l'opération qui consiste à faire reculer le point de rencontre. Le plan étant illimité, votre *processus* est éternel et vous n'aboutissez jamais à acculer le point dans ses derniers retranchements. L'expression « à l'infini » est un adverbe de manière ou de temps, mais non un adverbe de lieu, ainsi que je le disais plus haut.

Somme toute : une *sécante* ne devient pas *non sécante*, dans un endroit défini, ni à un endroit défini. — C'est une logomachie abusive ! La mathématique ainsi conçue loin d'être une langue bien faite, aurait pour véhicule l'argot le plus inintelligible. — Voilà ce que disent les philologues.

Le philologue enfin pourrait ajouter, mais à titre d'idée directrice seulement, que le mot PARALLÉLOGRAMME n'est pas autre chose qu'une réduction abrégée de « diagramme des parallèles ». — En tous cas, ce qui est certain et fécond, c'est que le parallélogramme étant défini et construit par le moyen de deux segments rectilignes qui se coupent par le milieu, on en déduit toutes les propriétés de cette figure sans avoir recours à aucun postulat. Suivant que les diagonales sont égales ou inégales, obliques ou perpendiculaires, et en combinant ces cas entre eux, on a de quoi définir le rectangle, le losange et le carré d'une façon admirablement générale, même sur des surfaces non planes.

DEUXIÈME PARTIE

Contributions psychologiques à l'étude des parallèles.

Les astronomes ont découvert et fait admettre l'*équation personnelle*. — Les géomètres auraient pu les devancer de bien des siècles, si toutefois la géométrie est antérieure à l'astronomie. L'intuition géométrique n'est déjà pas identique pour tout le monde. — Le raisonnement géométrique, la preuve géométrique ne signifient rien, en général, c'est-à-dire abstraction faite de la culture intellectuelle des gens et de leur tournure personnelle d'esprit. Cela est la revanche des non-euclidiens : mauvais terminologistes, mauvais logiciens, ils se relèvent aux yeux de tous par le côté *empirique* et le *relativisme* de leur Psychologie. — Mais c'est tout, ou plutôt non, ce n'est pas tout ! Si les Euclidiens eussent tenu la main aux définitions exactes et bien serrées, jamais leurs adversaires n'auraient osé mettre en avant la notion de « deux droites se rencontrant sous un *angle nul !* ».

Ceci d'ailleurs sera une transition entre la philologie et la psychologie : qu'est-ce qu'un Angle ?

Il y a, ce me semble, un vestige de la négligence ici dénoncée, lorsque nous cherchons à comprendre ce que les gens veulent dire en parlant d'un *arc de cercle ?* Il y a des arcs de circonférence et des secteurs de cercle, mais il ne faut en aucun cas confondre l'angle biradial avec l'angle-espace. Le psychologue accuse hautement cette amphibologie : « L'angle est-il une situation relative de deux demi-droites, ou bien une portion définie de l'espace plan absolu ? » — Répondez. Et comme personne ne consent à répondre franchement, le psychologue continue sa grêle de questions :

1° Que voulez-vous dire en annonçant que deux angles adjacents égalent deux droits ?

2° Qu'est-ce que ces deux angles adjacents dont les côtés distincts sont en ligne droite ?

3° Qu'est-ce que cette somme des angles autour d'un sommet commun et égale à quatre droits ?

4° Qu'est-ce enfin et surtout (!) que l'*espace-bande* compris entre deux parallèles ?

Et, comme personne encore ne veut se compromettre là-dessus, nous dirons ceci :

1° L'espace-bande compris entre deux parallèles n'est point un angle *nul*, c'est un INCOMPARABLE à la façon dont Leibniz a cherché ses infiniment petits.

2° Une *bande-espace* est double ou triple d'une autre, comme la différentielle (dy) est double ou triple de l'accroissement unitaire et étalon (dx).

3° Une bande, si large qu'elle soit, ne peut en se répétant devenir une *partie aliquote* de l'espace plan.

4° Aucun *angle-espace*, dans le sens véritable, ne peut rester contenu dans une bande. (Bertrand de Genève).

Nous voici au cœur du sujet psychologique. (Théorie de la connaissance). On peut faire de la géométrie bidimensionnelle sur trois faces principales, ayant avant tout cette propriété, savoir : « Que l'on transportera les figures, d'un endroit en un autre, sans *plissement* ». (Je traduis une phrase de Gauss). L'axiome des axiomes est donc celui-ci : « Transportabilité et superposabilité des figures ». — C'est le *principe majeur de la technicité géométrique*.

Le psychologue est enchanté de voir cette hiérarchie introduite dans les vieux axiomes jaloux les uns des autres, oligarchistes et faussement démocrates ! Il est certain que les axiomes ne se valent pas... (*apodictiquement* parlant). — Ce serait trop facile !

L'Euclidien comprendra que sa géométrie n'est ni plus ni moins vraie que les autres géométries... mais qu'elle est plus commode ! (Poincaré).

L'Euclidien admettra même, en y mettant un peu de bonne volonté, que sa géométrie est *plane*, c'est-à-dire *plate*, *homaloïdale*, *bourgeoise*, *opportuniste*, *tempérée*, comme une foule immense de choses en ce bas mode ! — Psychologiquement l'EUCLIDIANISME est encore conforme à son étymologie, c'est la BONNE CLEF pour ouvrir les serrures moyennes, sans aucune ironie ! — Mais il pourrait très bien se faire que le nom d' « Euclide » fût symbolique en tout cela ?

A ce point de vue : Euclidianisme = Transigeance = Succès! Revenons à la géométrie pure.

Il y a certainement une surface sur laquelle la géométrie euclidienne est vraie. — Cela suffit au psychologue. Si l'on veut que cette surface se nomme « Horisphère », nous la nommerons ainsi afin d'apaiser les passions. Et puis après ?

Théorème. — Par un point P pris en dehors d'une droite et par rapport à une transversale donnée, on peut mener autant de parallèles qu'on sait géométriquement en construire, c'est-à-dire *une seule*. Nous y insistons à dessein : *une seule :*

1° Si le point P est pris sur la transversale même, l'unicité de la parallèle est évidente, puisque toute autre droite ne ferait pas les angles voulus au point P avec la transversale donnée.

2° Si le point P est à la fois en dehors de la droite et de la transversale, il faut démontrer que du point P on ne peut mener à la transversale qu'*une* droite faisant *un* angle défini en grandeur et en direction. — Or, cette démonstration est facile.

Théorème. — Par un point pris en dehors d'une droite, on peut mener autant de droites asymptotes que l'on sait en construire, c'est-à-dire une seule.

Et en effet ce n'est là qu'un corollaire du théorème précédent, si l'on veut bien se rappeler que la *parallèle* est la seule droite *asymptote*, dans le sens propre des termes.

Mais le philosophe fera remarquer que si la seule droite asymptote que nous sachions construire est une parallèle, rien ne prouve qu'il n'y ait pas d'autres droites non parallèles et pourtant asymptotes dont la construction nous échappe ?

J'avoue que cette dialectique donne envie de jeter par terre toute la géométrie et même toute géométrie ! — Exemple.

1° Par un point pris sur une droite on peut élever *une* perpendiculaire, ou *plusieurs* ou *pas du tout*.

2° Par un point pris en dehors d'une droite on peut abaisser *une* perpendiculaire, ou *plusieurs* ou *aucune*.

Le géomètre se révolte aussitôt et demande au nom de quel absurde libéralisme on détruit l'unicité ou la réalité même de la perpendiculaire ?

Ce libéralisme n'est pourtant pas si absurde que cela, attendu que notre procédé pour élever une perpendiculaire est issu de la croyance que l'espace plan est exactement divisible en deux moitiés et chacune d'elles encore en deux moitiés. Lorsqu'on disait jadis, pour établir la possibilité de la quadrature du cercle, qu'un carré inscrit, grandissant jusqu'à devenir un carré circonscrit, devait à un moment critique passer tout juste par une aire égale à celle du cercle, on oubliait que cette croissance *continue* est une superstition ; et que en réalité, l'aire croissante du carré *saute par-dessus* la valeur incommensurable de l'aire circulaire. L'instant précédent donne un carré encore trop petit, l'instant suivant donne un carré déjà trop grand.

Chacun de nous attribue au principe de continuité des vertus diverses. Ainsi, au nom de la continitué *absolue* on élèvera, je suppose, une première perpendiculaire sur une droite. Or, au nom de la même continuité, je défie le géomètre d'en élever une seconde, à côté. Et voilà pourquoi : votre procédé de construction consistant à faire tourner la future perpendiculaire autour de son pied, vous ne parviendrez pas à chasser le point de rencontre à l'infini (voy. plus haut), vous n'atteindrez pas l'angle aigu de parallélisme et encore moins l'angle droit ! Voilà où l'on arrive en usant d'une dialectique à outrance. La géométrie finit par être pleine de *desiderata*.

Conclusions provisoires.

La linguistique et la psychologie nous conduisent à déclarer incorrecte, dans la forme et dans le fond, toute la théorie des parallèles. Il faudrait pouvoir faire abstraction de tout notre psittacisme à l'endroit de ce trop fameux chapitre. Au lieu de rabâcher automatiquement les mots, les phrases et les paragraphes, il faudrait loyalement se demander à quel résultat on prétend arriver soit par la raison pure, soit par l'intuition empirique, soit par l'emploi simultané de la logique et des notions expérimentales directes.

1° Si l'on admet notre première rectification, savoir : que deux droites coplanaires sont parallèles dès qu'elles font des angles définis avec une transversale définie et imposée au constructeur ;

2° Si l'on admet que le *parallélisme* est la seule condition actuellement réalisable d'*asymptotisme* ou de non rencontre ;

3° Si l'on veut bien songer que la *constructibilité* des figures est strictement obligatoire en géométrie propre ;

4° Si l'on veut bien se souvenir que deux lignes se rencontrant sous un angle nul coïncident dans toute leur étendue ;

Alors on abandonnera sans aucun regret le postulat euclidien, pour toujours, et sans vouloir combler le *desideratum* au moyen d'une géométrie non euclidienne.

En revanche, on saura mieux exprimer ce *desideratum*, en remarquant que, par rapport à une transversale définie, deux droites parallèles à une troisiéme sont parallèles entre elles, c'est-à-dire incapables de passer par un même point. Il ne reste donc qu'une lacune véritable, savoir : que deux droites pourraient être parallèles à une troisième, *mais pas par rapport à la même transversale.*

Dans ce cas, le DÉMONSTRATEUR (?) essayera de faire pivoter ses transversales autour des points milieux de la partie incluse, afin de les amener dans le prolongement l'une de l'autre. Bref : il ramènera ce cas au précédent et il en déduira « triomphalement » ! que par un point P pris en dehors d'une droite on ne peut construire qu'une parallèle, par rapport à une transversale *quelconque.*

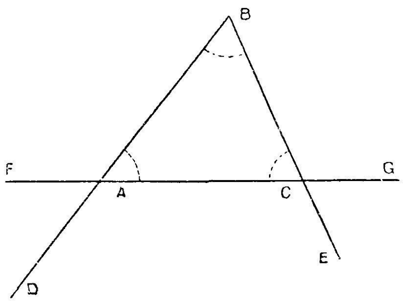
Cela irait à dire que lorsque deux droites sont parallèles par rapport à une transversale, elles le sont encore par rapport à *toute autre transversale.*

Et maintenant il n'est pas sûr du tout que les non-Euclidiens renonceraient à leur système favori, parce que ce système consiste à se passer du *criterium* de la constructibilité, en fondant de toutes pièces une géométrie exempte de contradictions... jusqu'à présent... du moins. Or cet appel à la non-contradiction est un hors-d'œuvre dialectique.

Deux hommes tels que Bertrand de Genève et Lobatscheffsky sont psychologiquement irréductibles. Leurs grammaires sont même incompatibles et je n'ose suivre M. Poincaré dans son audacieux lexique destiné censément à traduire les propositions du système S en celles du système Σ.

J'aimerais mieux, pour mon compte, démontrer d'emblée que la somme des trois angles d'un triangle ne peut être *inférieure* à deux droits (on sait que cette somme ne peut être *supérieure* à deux droits). Je me servirais, toujours à l'usage des gens qui ont ma psychologie, de la notion de l'ANGLE TRONQUÉ.

L'angle tronqué est un espace non fermé et néanmoins délimité par 3 droites. Par le fait, c'est un angle-espace diminué d'un triangle plus ou moins grand. Que cet espace triangulaire soit négligeable ou non, il est évident que l'angle tronqué ne saurait être *plus grand* que l'angle non tronqué dont il dérive.



Dans de telles conditions, la somme des espaces FAD + DACE + ECG ne saurait être supérieure à FAD + DBE + ECG et il en résulte que la somme des angles A + B + C égale au moins deux angles droits (angles-espace).

Telle est la tournure de mon propre esprit : je ne vois pas la faute de logique que je puis commettre en ceci, savoir : « Que la somme des *angles-espace* d'un triangle, n'étant ni supérieure, ni inférieure à deux droits, elle est forcément égale à deux droits. » Je suis évidemment un vulgaire euclidien, puisque cette preuve me suffit. — Mais il est probable que je ne serai pas le seul.

P.-S. — Il se dégage de tout ce qui précède que les définitions fondamentales des *angles*, des *parallèles*, des *espaces-bandes*, des *asymptotes* en général, et d'une foule d'idées géométriques telles que l'ANGLE TRONQUÉ, gagneraient beaucoup à un procès impartial en revision.

J'ai négligé *de parti pris* des questions curieuses sur les cercles parallèles de la sphère, les méridiens et la loxodromie, les hélices du cylindre et du cône, la spirale logarithmique.

Ce que je viens d'exposer rapidement doit suffire pour exciter l'attention des géomètres désireux d'appuyer leur science sur la double base d'une terminologie *impeccable* et d'une psychologie au contraire *très large*.

Raoul BARON (Paris).