Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 5 (1903)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'ESPACE EST-IL EUCLIDIEN?

Autor: Combebiac, G.

Kapitel: VI Qu'est-ce que la Géométrie?

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-6632

priété de suivre le plus court chemin et, par suite, dans les milieux homogènes (au nouveau sens que prendrait ce mot), de parcourir des lignes droites.

VI

Qu'est-ce que la Géométrie?

Le présent article allait être terminé, lorsqu'a paru le numéro de l'*Enseignement mathématique*, contenant la lumineuse vue d'ensemble de M. H. Laurent sur les fondements de la Géométrie. Sa lecture me fait ajouter ce paragraphe à un article déjà long.

Il est un point, beaucoup plus psychologique que mathématique d'ailleurs, sur lequel des géomètres éminents s'expliquent au moyen d'expressions que je ne puis comprendre, c'est celui qui est relatif à la nature même de la Géométrie.

Il s'agit au fond d'une question de mots, notamment des significations différentes que l'on peut donner à certaines expressions telles que : Géométrie, convention, science expérimentale.

Suivant M. H. Laurent, la Géométrie serait un langage, un système d'analyse ayant pour objet de *classer*, *coordonner*, *expliquer les phénomèmes observés dans le domaine de la Géométrie*, c'est-à-dire *les faits géométriques*, par conséquent, choisir entre les types possibles de géométries serait *une question dénuée de sens*.

On a dit, dans le même courant d'idées, que, parmi les Géométries, on avait simplement à se préoccuper de choisir *la plus commode*, et encore « que les axiomes de la Géométrie sont *des conventions* ».

Enfin, nous citerons les deux affirmations contradictoires :

« Il faut se résigner à faire de la Géométrie une science physique et expérimentale (1) ».

« La Géométrie n'est pas une science expérimentale (2) ».

---

(1) H. Laurent. *Les principes fondamentaux de la théorie des nombres et de la Géometrie*, Collection Scientia, Naud, 1902, Paris.

(2) H. Poincaré. *Sur l'ouvrage de M. Hilbert Grundlagen der Geometrie*, Bulletin des sciences mathématiques, 1902, Paris.

Pour que la Géométrie fût un simple casier de coordination pour les faits géométriques (il ne s'agit pas, bien entendu, du système d'analyse qui porte le nom incorrect de Géométrie analytique au lieu de s'appeler, comme il conviendrait, analyse géométrique), il faudrait que ceux-ci existassent en dehors d'elle. Or c'est ce qui n'est pas, et la preuve la plus directe, c'est que M. H. Laurent, pour qualifier leur domaine, n'a pas trouvé d'autre épithète que le mot « géométrique ».

Par cela seul que M. H. Laurent sait quels sont les faits qu'il qualifie de géométriques, il a déjà fait choix d'une géométrie : en particulier, la science de l'égalité euclidienne ne peut pas se confondre avec celle de l'égalité lobatchewskienne.

Et d'ailleurs, qu'on essaie de préciser l'idée de la géométrie jouant le rôle d'un langage par un exemple concret en donnant les représentations (?) d'un fait *géométrique* dans des systèmes différents de géométries !

La Géométrie euclidienne n'est pas *la plus commode* (qu'on essaie d'exprimer pour quel objet), mais bien celle qui étudie des faits d'une catégorie particulière, constitués (comme tout fait) par l'association de notions déterminées, parmi lesquelles certaines se rapportent à des relations possibles entre les autres ; ces notions sont celles de point, ligne, surface, intersection, contact, droites, plan, etc., sans oublier l'importante notion de l'égalité géométrique.

Ces notions (et il en est, par suite, de même des faits géométriques) sont précisément caractérisés par la propriété d'être indépendantes de tout déplacement sans déformation.

On voit donc que, en changeant l'idée de déplacement sans déformation, ce n'est pas seulement un système d'analyse que l'on change, mais bien les faits eux-mêmes qu'il s'agit d'étudier.

Les axiomes de la Géométrie, c'est-à-dire les propriétés fondamentales des notions qui constituent l'objet de cette science sont-ils conventionnels ?

Si l'on entend exprimer par là que l'esprit humain est libre de construire des édifices logiques sur des bases très différentes entre elles, c'est une naïveté, applicable à toute science rationnelle : à la Mécanique rationnelle et aux diverses branches de la Physique mathématique, par exemple.

Si l'on veut dire que l'on peut arbitrairement changer les axiomes de la Géométrie, tout en conservant le nom de cette science, j'estime qu'il n'est pas raisonnable de prendre le mot « Géométrie » dans cette acception.

L'esprit humain ne crée une idée, un mot que poussé par un mobile, un *intérêt*. Supprimer le mobile et conserver le mot est absurde, antinaturel. Or l'intérêt spécial qui caractérise la Géométrie disparaît si l'on remplace certains axiomes, c'est-à-dire certaines notions, par d'autres.

Au surplus, qu'on essaie d'expliquer d'une manière vraiment positive ce que l'on peut entendre par cette proposition : les principes de la Géométrie sont des conventions.

Il reste à examiner si la Géométrie est une science physique, une science expérimentale.

Ce qui nous importe n'est pas de savoir comment on doit s'exprimer sur ce point, mais bien comment on doit classer la Géométrie parmi les autres sciences.

Je dis qu'elle ne se différencie pas, au point de vue qui nous occupe, de la Mécanique rationnelle et des diverses branches de la Physique mathématique.

Je m'élève tout d'abord contre la distinction faite souvent entre les *êtres de raison* et les objets réels.

En somme, ce qu'atteint notre connaissance, ce sont toujours, des idées, des images : l'idée du corps solide indéformable n'est pas moins *réelle* (?) que celle du corps solide élastique, elle appartient à un domaine d'observation moins attentive, voilà tout.

L'Optique élémentaire est tout aussi physique, expérimentale — si l'on veut employer ces expressions — que l'Optique de Fresnel et celle de Maxwell.

Le *point matériel* de la Mécanique rationnelle n'est pas plus un *être de raison* qu'un objet quelconque.

Les notions qui sont à la base des sciences rationnelles sont soumises aux mêmes lois de formation que celles de nos notions que nous qualifierions le plus volontiers de réelles — si ce mot pouvait avoir un sens dans l'espèce. Elles ne résultent pas d'une opération d'abstraction, elles sont simplement le résultat du premier regard maladroit encore que nous jetons sur la nature, et elles constituent les matériaux avec lesquels notre esprit construit les idées compliquées qui devront s'accorder avec des expériences plus précises,

Cela admis, on ne voit pas en quoi la théorie de l'égalité des longueurs, des surfaces et des volumes indéformables est d'une autre nature que la théorie élémentaire des actions électriques, l'Optique élémentaire ou toute autre science déductive ayant des principes provenant directement ou indirectement de l'expérience.

Enfin la Gométrie reste justiciable de l'expérience.

La mesure des objets sensiblement indéformables a suffisamment intéressé l'humanité pour donner lieu à la science importante qu'est la Géométrie élémentaire et il est très remarquable que les lois relativement récentes de la Mécanique et de la Physique soient intimement liées à l'idée du déplacement sans déformation, laquelle intervient dans ces lois par la distance, représentant numérique de cette idée comme étant le seul invariant indépendant relatif au groupe des déplacements.

Il ne saurait être indifférent, au point de vue des conséquences physiques, que la distance qui figure dans les lois de la Dynamique ou dans l'expression de l'énergie potentielle due à des forces cosmiques, électriques, électrodynamiques, etc., soit euclidienne ou non-euclidienne.

Or l'unité de plus en plus probable de la conception que l'humanité est appelée à se faire de la Nature nous fait penser que des modifications fondamentales dans la Mécanique entraîneraient des modifications concordantes dans la Géométrie.

A vrai dire, une hypothèse reste à envisager, c'est celle suivant laquelle le rôle essentiel joué par la mesure des distances dans la plupart des branches de la science résulterait d'un phénomène purement subjectif, c'est-à-dire que l'esprit humain, hypnotisé par l'idée du corps solide, en aurait fait l'élément de toute son analyse de la nature et le repère auquel il rapporte toutes les modifications d'ordre mécanique

Mais alors on devrait pouvoir, par de simples définitions de mots, déduire rationnellement de nos conceptions géométriques les notions et les lois fondamentales de la Mécanique, qui d'absolues deviendraient relatives, j'entends anthropomorphiques.

Notre cerveau, libéré de sa polarisation vers l'idée d'indéformabilité, pourrait alors établir une Mécanique qui conserverait sans doute les notions de point et de position, mais qui ne serait pas liée à l'idée exclusive de distance.

Pure hypothèse d'ailleurs, que n'encourage guère l'insuccès des tentatives faites jusqu'ici pour réduire à un clair assemblage ce système à liaisons surabondantes que constituent les principes de la Mécanique, hypothèse très séduisante pour l'analyste en ce qu'elle réduirait le nombre des principes échappant à la pure logique, encore plus séduisante pour le philosophe positif, qui verrait ainsi se dissiper une bonne partie du caractère mystérieux présenté par certaines lois fondamentales de la Mécanique et de la Physique, pour lesquelles aucune explication ne se présente à notre esprit.

G. Combebiac (Limoges.)