Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 5 (1903)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'ESPACE EST-IL EUCLIDIEN?
Autor: Combebiac, G.
Kapitel: V La Ligne droite
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-6632

Cette idée ne repose évidemment sur aucun fait expérimental.

Une notion n'étant plus valable en dehors du domaine de l'observation qui lui a donné naissance, nous ne croyons pas que l'on puisse légitimement donner au mot infini une valeur physique qu'il ne saurait avoir.

La conception de l'univers comme la répétition indéfinie de ce qu'une expérience restreinte nous a fait connaître nous paraît aussi inacceptable que celle qui consisterait à croire que dans un examen des corps solides qui porterait sur des particules de plus en plus petites, persisteraient les propriétés de continuité, d'élasticité, de couleur, etc., relatives à l'observation courante.

Le *prolongement* de nos images représentatives au delà du domaine empirique est une opération familière à l'esprit humain ; mais on sent tout l'arbitraire de ces généralisations transnaturelles, qui sont, je crois, les procédés de création des idées métaphysiques.

V

La Ligne droite.

Définition de la ligne droite. — On a souvent confondu la *définition* de la ligne droite avec l'énoncé de ses propriétés fondamentales, c'est-à-dire de celles d'où se déduisent rationnellement toutes les autres.

Cette confusion est une erreur.

Nous montrerons en effet qu'on peut créer des géométries en prenant pour base des systèmes de lignes choisis arbitrairement dans une large mesure, auxquels nous attribuerons les propriétés du système des lignes droites.

A la base de toute science rationnelle se trouvent des notions primordiales, qu'il est impossible de définir autrement que par le procédé consistant à montrer un objet pour indiquer la signification du mot qu'il représente.

Pour la Géométrie, si l'on conserve les procédés habituels de démonstration des premiers théorèmes, la notion primordiale est évidemment celle du déplacement sans déformation.

On peut bien en énoncer les propriétés fondamentales, comme a cru le faire Helmholtz, comme l'a fait Sophus Lie ; mais cela ne suffit pas à la *définir*. Il existe en effet une infinité de groupes de transformations ponctuelles de l'espace jouissant des mêmes propriétés que le groupe des déplacements. Chacun de ces groupes est ce que devient le groupe des déplacements dans une transformation ponctuelle univoque de l'espace.

Les lignes droites sont alors transformées en d'autres lignes qui jouissent de toutes leurs propriétés.

Toutes les propositions de la Géométrie restent exactes, à condition de représenter par les mots : égalité, ligne droite, plan, etc., des choses autres que celles que ces mots représentent habituellement.

Une fois acquise la notion primordiale de déplacement sans déformation, la ligne droite peut être *définie*, ou plutôt la notion de ligne droite est comprise dans celle de déplacement sans déformation.

En effet une des propriétés des déplacements sans déformation consiste en ce que, lorsqu'on maintient fixes deux points d'une figure, tous les points d'une certaine ligne passant par ces deux points restent également fixes.

On obtient ainsi des lignes déterminées par deux points, par suite dépendant de quatre paramètres : ce sont les lignes droites.

Au moyen d'un des groupes de transformations dont il vient d'être question, nous obtiendrons de la même manière des lignes déterminées également par deux points, qui ne seraient pas des lignes droites.

Détermination de la ligne droite par deux points. — On vient de voir que la propriété d'être déterminée par deux points ne peut pas constituer une définition de la ligne droite. Cela résulte encore plus clairement, si cela était nécessaire, de la signification du mot « déterminé ».

Une ligne droite est déterminée par la connaissance de deux de ses points et *par le fait d'être une ligne droite*, c'est-à-dire que deux points la déterminent *parmi les lignes droites*.

Le fait pour une ligne d'être déterminée par deux points ne constitue évidemment pas une propriété de cette ligne mais bien une propriété d'un système de lignes, dont elle fait partie.

Mais si le fait d'être déterminée par deux points ne peut pas être une définition de la ligne droite, il peut, dans une certaine manière d'édifier la Géométrie, constituer une propriété fondamentale, autrement dit un axiome.

On sait que la Géométrie projective peut être établie indépendamment de la Géométrie métrique, celle-ci venant alors la compléter par l'introduction du plan et du cercle imaginaire de l'infini. Mais, tandis que les déplacements sans déformation ont paru constituer une notion si naturelle qu'on a couramment appliqué leurs propriétés sans éprouver le besoin de les énoncer, les transformations projectives au contraire sont loin de se prêter facilement à une conception intuitive, et on ne peut guère les placer en qualité de notion fondamentale à la base de la Géométrie.

Il faut alors recourir, pour ce rôle, à la ligne droite.

Dans ces conditions, sans se demander quelle est l'origine empirique de la notion de ligne droite, on la prendra comme notion fondamentale, et on devra alors commencer par énoncer ses propriétés fondamentales.

Observons encore, et pour ne plus y revenir, qu'une transformation ponctuelle de l'espace transformerait le système des lignes droites en un système jouissant des mêmes propriétés et par conséquent susceptible de servir de base à une géométrie, ou plutôt à un ensemble de faits susceptibles d'être exprimés par les propositions de la géométrie projective (puisqu'il ne s'agit, pour le moment, que de cette dernière).

La première propriété fondamentale est que les lignes droites constituent un système à quatre paramètres. L'on doit ajouter, si l'on adopte l'hypothèse admise dans cette étude (§ III), que la condition de passer par deux points *quelconques* donne toujours lieu à une détermination et à une seule.

Cette propriété des lignes droites ne constitue pas une base suffisante pour la géométrie projective. Il faut en outre qu'il existe des plans, c'est-à-dire des surfaces à trois paramètres telles que, si une ligne droite a deux de ses points sur l'une d'elles, elle y soit contenue tout entière.

L'examen de la question montre facilement que l'existence des plans est liée à la propriété suivante des lignes droites :

Si trois lignes droites se rencontrent deux à deux, et qu'une quatrième rencontre les deux premières, elle rencontre aussi la troisième.

La recherche de l'expression analytique de cette condition constitue une étude des plus intéressantes, qui se rattache aux travaux de M. Kœnigs sur les équations différentielles exprimant la condition de rencontre de deux lignes infiniment voisines faisant partie d'un système à un certain nombre de paramètres.

Ce n'est pas ici le lieu de pénétrer plus avant dans cette question.

Remarquons enfin que l'on peut rattacher la détermination d'une ligne droite par deux de ses points à la notion de distance, qui, elle, dépend incontestablement de celle de déplacement sans déformation.

On peut en effet construire une ligne droite déterminée par deux de ses points A et B, en effectuant uniquement des mesures de distance. Il suffit pour cela d'observer que, sauf sur la droite AB, il n'existe pas de point C qui soit le seul à être distant des points A et B des longueurs AC et BC.

On peut, au moyen d'une propriété analogue, déterminer les points d'un plan dont on connaît trois points.

Lignes minimales. — Il faut citer, parmi les propriétés de la ligne droite que l'on a voulu utiliser comme définition, celle d'être le plus court chemin d'un point à un autre. (On remarquera que cette propriété occupe une place à part dans la géométrie et n'est pas utilisée dans les démonstrations).

Cette propriété est démontrable, puisqu'il suffit d'appliquer le calcul des variations à l'intégrale qui représente la longueur d'une courbe, et cela en prenant, pour l'élément linéaire, l'expression euclidienne ou non-euclidienne.

Dans l'ignorance où je suis d'une démonstration synthétique, qui doit probablement exister, j'en esquisserai une dans le but surtout de montrer les éléments de la question.

Il suffit évidemment de prouver que, dans un triangle, un côté est plus petit que la somme des deux autres et, en abaissant du sommet une perpendiculaire sur le côté opposé, on voit facilement qu'il suffit de démontrer que la perpendiculaire est plus courte que les obliques.

Si l'on mène à une droite Δ une perpendiculaire issue d'un point extérieur O, et deux obliques issues du même point et aboutissant à des points équidistants du pied de la perpendiculaire, ces obliques seront égales comme côtés homologues de deux triangles égaux.

En outre, si on s'éloigne d'une manière continue de la perpendiculaire, les longueurs des obliques varient dans un sens permanent. Car, sans cela, on rencontrerait deux obliques égales, et en joignant le point O au milieu de la distance de leur pied, on formerait deux triangles, qui seraient égaux comme ayant leurs côtés égaux deux à deux. De l'égalité des angles homologues, il résulterait qu'on aurait construit une seconde perpendiculaire, ce qui est contraire à un théorème connu.

Il résulte de là que la longueur de la perpendiculaire est minimum ou maximum, ou bien que toutes les droites issues du point O et arrêtées à la droite Δ sont égales et sont des perpendiculaires à cette dernière.

Pour décider entre ces trois cas, il est nécessaire de faire intervenir les propriétés particulières des trois Géométries.

Cette étude étant déjà fort longue, nous laisserons au lecteur le soin de terminer la démonstration, en faisant observer toutefois qu'en Géométrie sphérique, il faut préciser que la propriété du minimum appartient au plus petit des deux segments déterminés par deux points sur une droite.

Rectilinéarité du rayon lumineux. — Nous avons vu qu'une ligne droite peut être déterminée matériellement comme axe de rotation d'un corps solide, ou encore au moyen de mesures directes de distances, c'est-à-dire, dans les deux méthodes, en utilisant les propriétés des corps solides.

Pratiquement, on emploie souvent la propriété des rayons lumineux d'être rectilignes, et l'on a parfois voulu voir dans cette propriété la base de l'idée de ligne droite.

La rectilinéarité du rayon lumineux est, comme l'observe Helmholtz, un fait physiquement démontrable.

Si un rayon lumineux issu d'un point A passe par un point B, sa rectilinéarité se vérifiera en constatant qu'il continue à passer par ce dernier point, lorsqu'on fait tourner autour de la droite AB l'appareil solide qui le produit. La ligne droite, dans cette expérience, est déterminée, ainsi qu'il convient, comme axe de rotation d'un corps solide.

Au point de vue rationnel, la rectilinéarité d'un rayon lumineux dans un milieu homogène tient évidemment aux deux propositions suivantes :

1° Un milieu est dit homogène, lorsque les propriétés physiques en un point de l'espace situé dans le milieu, ne changent pas dans tout déplacement sans déformation du milieu;

2° Les lois physiques sont indépendantes du lieu, c'est-à-dire sont invariantes par rapport aux déplacements sans déformation.

A propos de l'homogénéité, nous ferons une observation.

On dit quelquefois que l'*espace* est homogène.

Cette façon de s'exprimer est évidemment défectueuse, si l'on prend le mot « espace » dans le sens très-restreint où nous avons dû l'employer dans une question qui exigeait une précision absolue des termes. Mais il n'y a pas grand inconvénient, à condition de ne pas se laisser duper par les mots, à s'exprimer comme si les propositions géométriques représentaient les propriétés d'une entité, qui serait l'espace.

Dans cette manière de parler, purement métaphorique, l'homogénéité de l'espace n'exprime pas une propriété objective, mais est seulement une constatation résultant de la définition de l'homogénéité.

L'homogénéité non-euclidienne ne constitue pas évidemment la même propriété physique que l'homogénéité euclidienne, et c'est une des raisons pour lesquelles nous disions que les principes de la Géométrie ont une portée physique.

Dans tous les cas, les lignes droites sont les mêmes lignes dans les trois Géométries, et c'est pour cela qu'on ne doit pas parler de la ligne droite *euclidienne*; l'incorrection est du même ordre que celle de l'expression : l'espace euclidien.

Comme l'observe Helmholtz, il est probable que, si l'on était conduit à modifier certaines lois physiques en raison de faits non-euclidiens, le rayon lumineux n'en conserverait pas moins la propriété de suivre le plus court chemin et, par suite, dans les milieux homogènes (au nouveau sens que prendrait ce mot), de parcourir des lignes droites.

VI

Qu'est-ce que la Géométrie?

Le présent article allait être terminé, lorsqu'a paru le numéro de l'*Enseignement mathématique*, contenant la lumineuse vue d'ensemble de M. H. Laurent sur les fondements de la Géométrie. Sa lecture me fait ajouter ce paragraphe à un article déjà long.

Il est un point, beaucoup plus psychologique que mathématique d'ailleurs, sur lequel des géomètres éminents s'expliquent au moyen d'expressions que je ne puis comprendre, c'est celui qui est relatif à la nature même de la Géométrie.

Il s'agit au fond d'une question de mots, notamment des significations différentes que l'on peut donner à certaines expressions telles que : Géométrie, convention, science expérimentale.

Suivant M. H. Laurent, la Géométrie serait un langage, un système d'analyse ayant pour objet de *classer*, *coordonner*, *expliquer les phénomèmes observés dans le domaine de la Géométrie*, c'est-à-dire *les faits géométriques*, par conséquent, choisir entre les types possibles de géométries serait *une question dénuée de sens*.

On a dit, dans le même courant d'idées, que, parmi les Géométries, on avait simplement à se préoccuper de choisir *la plus commode*, et encore « que les axiomes de la Géométrie sont *des conventions* ».

Enfin, nous citerons les deux affirmations contradictoires :

« Il faut se résigner à faire de la Géométrie une science physique et expérimentale [1] ».

« La Géométrie n'est pas une science expérimentale [2] ».

---

[1] H. Laurent. *Les principes fondamentaux de la théorie des nombres et de la Géometrie*, Collection Scientia, Naud, 1902, Paris.

[2] H. Poincaré. *Sur l'ouvrage de M. Hilbert Grundlagen der Geometrie*, Bulletin des sciences mathématiques, 1902, Paris.