est représentée par des valeurs imaginaires (représentant des points de l'infini lobatchewskien), fait analytique qui n'est en rien contradictoire avec la conception de l'espace exposée plus haut.

Ce fait est corrélatif de la propriété de log x de prendre une série de valeurs imaginaires, pour passer de $+\infty$ à $-\infty$, x variant d'une manière continue de $-\infty$ à 0.

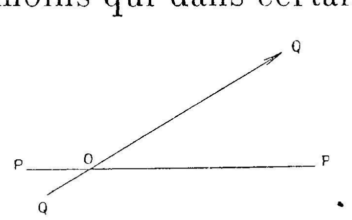
En résumé, les hypothèses métriques n'interviennent dans la conception même de l'espace ponctuel, considéré comme une variété numérique, que parce qu'il s'établit une confusion entre les propriétés de l'espace et celles de certaines coordonnées — du moins c'est ainsi que nous nous représentons l'état de cette question. G. COMBEBIAC.

Lettre à M. Laisant, à propos de son article sur les bissectrices d'un angle.

Université d'Edinburgh, le 12 novembre 1902.

Cher Monsieur,

J'ai pris beaucoup d'intérêt à la lecture de vos *Remarques sur les bissectrices d'un angle* publiées dans le numéro de juillet 1902, de l'*Enseignement mathématique*. Le sujet se rattache aux travaux qui paraissent de temps en temps sur l'introduction des quantités négatives en géométrie, question appelée à jouer un rôle de plus en plus important dans l'enseignement des mathématiques élémentaires. Une attention soutenue portée sur les grandeurs géométriques négatives éviterait souvent, je crois, beaucoup de difficultés qui se présentent dans la pratique. Plusieurs soi-disant démonstrations de la géométrie analytique élémentaire ne sont pas du tout des démonstrations mais bien d'heureuses coïncidences avec les formules algébriques qui s'appliquent nécessairement à tous les cas. Comme exemple, je citerai seulement quelques-unes des démonstrations qu'on donne pour l'expression de l'aire du triangle en fonction des coordonnées de ses sommets. Dans la plus élémentaire, fondée sur la distance entre deux points (x) et (x') prise sous la forme $\sqrt{\Sigma(x-x')^2}$, on introduit la possibilité d'un signe moins qui dans certaines circonstances paraît laisser un doute.

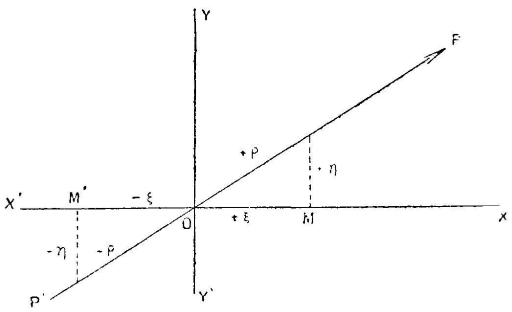


En premier lieu qu'entend-on par l'angle de deux droites ? Avant de pouvoir considérer l'angle nous devons préalablement diriger les droites et en choisir une comme base.

Ainsi l'inclinaison de $\overline{OQ}$ sur $\overline{OP}$ où l'angle $\widehat{POQ}$ est la rotation nécessaire peut amener $\overline{P'OP}$ sur la direction $\overline{Q'OQ}$.

Les cosinus directeurs d'une droite fournissent un moyen parfait d'interpréter la direction de cette droite. Pour abréger je me borne au cas de droites situées dans un plan passant par l'origine.

Si $\overline{OP}$ est le sens positif de la droite, c'est-à-dire qu'une mesure faite sur cette droite soit prise avec le signe $+$ dans la direction OP et avec le signe — dans la direction OP'.



Alors les cosinus directeurs de la droite sont

$$\alpha = \frac{\xi}{\rho}, \ \beta = \frac{\eta}{\rho}$$

où (ξ, η) est un point quelconque R pris sur la droite et ρ la longueur dirigée OR.

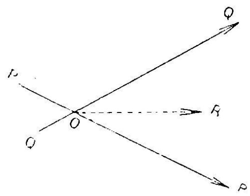
Ainsi

$$\frac{-\xi}{-\rho} = \frac{+\xi}{+\rho}.$$

Pour la droite POP', ces cosinus directeurs sont changés de signe. On a de semblables résultats dans l'espace à trois dimensions.

A ce point de vue rien ne pourrait être plus élégant que votre recherche des cosinus directeurs des bissectrices des angles de deux droites, mais je crois que vous y êtes forcément amené en discutant la question de savoir si c'est l'angle aigu ou l'angle obtus que nous bissectons.

Les droites étant dirigées par les cosinus directeurs, nous n'avons par la liberté de choisir l'angle compris entre ces droites.



Il est déjà donné par les lignes dirigées de O vers P $(\alpha\beta\gamma)$ et Q $(\alpha', \beta', \gamma')$.

Il y a plus : si le dénominateur dans les rapports $(\alpha + \alpha') : (\beta + \beta') : (\gamma + \gamma')$ est pris positivement, la bissectrice est, elle aussi, dirigée et sa direction est celle que nous prendrions naturellement pour direction positive de cette bissectrice. Les trois autres bissectrices correspondent à $-(\alpha + \alpha') : -(\beta + \beta') : -(\gamma + \gamma')$; $(-\alpha + \alpha') : (-\beta + \beta') : (-\gamma + \gamma')$; $(\alpha - \alpha') : (\beta - \beta') : (\gamma - \gamma')$, le dénominateur pour les cosinus directeurs étant pris positivement.

Ainsi $(-\alpha + \alpha') : (-\beta + \beta') : (-\gamma + \gamma')$ correspond à la bissectrice entre OP' et OQ. Si la direction de la bissectrice OR n'est pas essentielle, le même problème se résout aisément comme il suit. Soient $(\xi, \eta, \xi,)$ les cosinus directeurs ; puisque $\cos \widehat{POR} = \cos \widehat{ROQ}$ on a

$$\xi\alpha + \eta\beta + \xi\gamma = \Sigma\xi\alpha'$$

c'est-à-dire

$$\Sigma\xi(\alpha - \alpha') = 0. \qquad (1)$$

En outre les trois directions sont coplanaires

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) fournissent les rapports pour ξ, η, ζ,

$$\alpha + \alpha' : \beta + \beta' : \gamma + \gamma',$$

mais les équations (1) et (2) sont également vérifiées par la droite ayant pour direction $\overline{\mathrm{RO}}$; de là l'incertitude en direction.

Pour la bissectrice de l'angle supplémentaire, nous changerions les signes de α', β', γ', pour obtenir l'angle P′OQ.

Les cosinus directeurs sont donnés par

$$(\alpha - \alpha') : (\beta - \beta') : (\gamma - \gamma').$$

Le problème le plus général de déterminer les cosinus directeurs de $\overline{\mathrm{OR}}$ lorsque $\widehat{\mathrm{POR}} = \frac{1}{n}\widehat{\mathrm{POQ}}$ peut être résolu comme suit. C'est une question de trigonométrie et de théorie des équations de déterminer $n = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta$ de sorte que

$$x = \cos\left[\frac{1}{n} \text{ arc cos } (\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')\right].$$

De là

$$x^2\Sigma\xi^2 = (\Sigma\alpha\xi)^2. \tag{1}$$

L'équation (2) est la même que plus haut. Ces deux équations correspondent à deux droites et la droite demandée doit être telle que

$$\cos \widehat{\mathrm{ROQ}} = \left\{ \cos (n-1) \widehat{\mathrm{POR}} \right\}.$$

Dans tout problème sur la ligne droite dans un plan renfermant des mesures d'angles, l'équation d'une droite sous la forme $y = mx + c$ est d'un faible usage parcequ'une telle droite ne peut pas être une droite dirigée et l'équation représente également une certaine droite dans une direction donnée ou la même droite dans la direction opposée. C'est dû à ce fait que tang $(\pi + \theta) =$ tang θ.

Lorsque par conséquent nous cherchons à mesurer l'angle entre deux droites $y = mx + c$ et $y = m'x + c'$ et que nous obtenons

$$\text{arc tang } \frac{m - m'}{1 + mm'}.$$

l'ambiguïté est due à ce fait que les droites ne sont pas dirigées. Heureusement dans les cas importants du parallélisme et de la perpendicularité cette difficulté ne s'élève pas. Quand l'équation de la perpendiculaire à une droite dans un plan ou à un plan dans l'espace se présente, c'est, je crois, une erreur d'imaginer que la perpendiculaire issue de l'origine doive toujours être prise comme positive, car cela enlève aux considérations développées ci-dessus les avantages qu'elles présentent au point de vue des expressions algébriques.

L'équation de géométrie plane

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0,$$

signifie : la ligne telle qu'en considérant la perpendiculaire qu'on lui abaisse de l'origine, celle-ci est inclinée de l'angle θ sur l'axe des x, tandis que la distance de l'origine au pied de cette perpendiculaire est p en grandeur et en signe. Avec cette interprétation il n'y a plus de confusion possible entre les deux droites

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0,$$
$$x \cos \theta + y \sin \theta + p = 0,$$

car l'essentiel est le sens ou la direction de la perpendiculaire.

Remarquons aussi que

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$$
$$x \cos (\theta + \pi) + y \sin (\theta + \pi) + p = 0$$

représentent concurremment la même droite. Les deux perpendiculaires ont des sens opposés sur la même droite de base. La droite elle-même dans ce cas est non dirigée mais ceci est dû à cette particularité qu'elle est perpendiculaire à la droite menée par l'origine. Si au lieu d'être perpendiculaire à la droite menée par l'origine, la droite est inclinée de l'angle θ, cette dernière est encore dirigée et son équation est

$$x \sin (\theta + \varphi) - y \cos (\theta + \varphi) - p \sin (- \varphi) = 0.$$

Cette équation est toujours distincte de

$$x \sin (\theta - \varphi) - y \cos (\theta - \varphi) - p \sin (- \varphi) = 0$$

sauf lorsque $2\varphi = \pi$.

De semblables considérations s'appliquent dans l'espace à l'équation

$$x \cos \theta + y \cos \varphi + z \cos \psi - p = 0.$$

Charles Tweedie (Edinburgh).

Réponse à M. Cailler au sujet du calcul des probabilités.

Nous remercions vivement M. Cailler, de l'attention qu'il a bien voulu donner à l'article très audacieux qu'a publié de nous cette revue exclusivement mathématique, alors que nous ne sommes pas des