Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 5 (1903)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Kapitel: propos d'une note récente sur la Géométrie générale.

CORRESPONDANCE

A propos d'une note récente sur la Géométrie générale.

Un correspondant de l'*Enseignement mathématique* a fait observer, en s'appuyant sur un exemple, que c'est à tort que certains géomètres pensent que la géométrie projective est indépendante de la théorie des parallèles et que ses théorèmes doivent subsister sans modification dans la géométrie non-euclidienne.

Il me semble que les géomètres ainsi visés pourraient peut-être opposer à l'objection élevée la réponse suivante :

La conception de l'infini géométrique comporte une grande part d'arbitraire. Rien n'empêche, par exemple, de concevoir l'espace comme constitué par des points, les uns situés à *distance* finie, les autres à distance infinie, ceux-ci étant définis comme étant inaccessibles au moyen de déplacements sans déformation.

Dès lors, deux lignes droites situées dans un même plan *se rencontrent toujours* à distance finie ou infinie ; une ligne droite peut être considérée comme une ligne fermée ; les plans, ainsi que les surfaces algébriques à branches infinies, doivent être considérées comme des surfaces fermées.

Cette conception (et n'est-ce pas la plus satisfaisante au point de vue de la généralité des propositions, tant en *Analysis situs* qu'en géométrie projective ?) revient à admettre que, si l'on considère un système de coordonnées projectives dans l'espace (et l'on sait que de tels systèmes peuvent être établis indépendamment de toute idée de distance), à tout groupe x, y, z de trois valeurs réelles de ces coordonnées, y compris $\pm\infty$, correspond un point de l'espace, et réciproquement.

Les systèmes de coordonnées vulgaires, basées sur la distance euclidienne, sont des cas particuliers des systèmes projectifs et jouissent par conséquent des mêmes propriétés.

Mais il n'en est pas de même des systèmes qui seraient basés sur la notion de distance lobatchewskienne. Celle-ci est effectivement une fonction logarithmique des coordonnées projectives et peut, pour des valeurs réelles de ces coordonnées, prendre des valeurs imaginaires, de sorte que, avec un système de coordonnées lobatchewskiennes, la solution commune aux équations de deux lignes droites situées dans un même plan, mais ne se rencontrant pas (au sens lobatchewskien), est représentée par des valeurs imaginaires (représentant des points de l'infini lobatchewskien), fait analytique qui n'est en rien contradictoire avec la conception de l'espace exposée plus haut.

Ce fait est corrélatif de la propriété de log x de prendre une série de valeurs imaginaires, pour passer de $+\infty$ à $-\infty$, x variant d'une manière continue de $-\infty$ à 0.

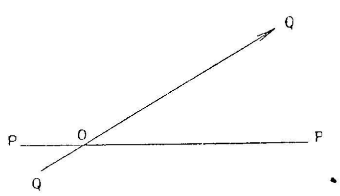
En résumé, les hypothèses métriques n'interviennent dans la conception même de l'espace ponctuel, considéré comme une variété numérique, que parce qu'il s'établit une confusion entre les propriétés de l'espace et celles de certaines coordonnées — du moins c'est ainsi que nous nous représentons l'état de cette question. G. COMBEBIAC.

Lettre à M. Laisant, à propos de son article sur les bissectrices d'un angle.

Université d'Edinburgh, le 12 novembre 1902.

Cher Monsieur,

J'ai pris beaucoup d'intérêt à la lecture de vos *Remarques sur les bissectrices d'un angle* publiées dans le numéro de juillet 1902, de l'*Enseignement mathématique*. Le sujet se rattache aux travaux qui paraissent de temps en temps sur l'introduction des quantités négatives en géométrie, question appelée à jouer un rôle de plus en plus important dans l'enseignement des mathématiques élémentaires. Une attention soutenue portée sur les grandeurs géométriques négatives éviterait souvent, je crois, beaucoup de difficultés qui se présentent dans la pratique. Plusieurs soi-disant démonstrations de la géométrie analytique élémentaire ne sont pas du tout des démonstrations mais bien d'heureuses coïncidences avec les formules algébriques qui s'appliquent nécessairement à tous les cas. Comme exemple, je citerai seulement quelques-unes des démonstrations qu'on donne pour l'expression de l'aire du triangle en fonction des coordonnées de ses sommets. Dans la plus élémentaire, fondée sur la distance entre deux points (x) et (x') prise sous la forme $\sqrt{\Sigma(x-x')^2}$, on introduit la possibilité d'un signe moins qui dans certaines circonstances paraît laisser un doute.



En premier lieu qu'entend-on par l'angle de deux droites ? Avant de pouvoir considérer l'angle nous devons préalablement diriger les droites et en choisir une comme base.

Ainsi l'inclinaison de $\overline{OQ}$ sur $\overline{OP}$ où l'angle $\widehat{POQ}$ est la rotation nécessaire peut amener $\overline{P'OP}$ sur la direction $\overline{Q'OQ}$.

Les cosinus directeurs d'une droite fournissent un moyen parfait d'interpréter la direction de cette droite. Pour abréger je me borne au cas de droites situées dans un plan passant par l'origine.