Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 5 (1903)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES APPLICATIONS DU CALCUL DES PROBABILITÉS A LA MÉTHODE SCIENTIFIQUE

Autor: Piéron, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-6622

LES

APPLICATIONS DU CALCUL DES PROBABILITÉS

A LA MÉTHODE SCIENTIFIQUE

Chapitre I. — *Le problème du calcul des probabilités*

Position du problème. — Applications pratiques.

Le calcul des probabilités est une des parties des sciences mathématiques, que les anciens ne paraissent pas avoir connue. C'est, semble-t-il, au génie intuitif de Pascal, dont l'attention se trouva portée sur les jeux dits de hasard, que les temps modernes doivent cette découverte, dont la fécondité, si elle se mesurait au succès et à la faveur qu'elle n'a jamais cessé d'obtenir, devrait être vraiment énorme. Indépendamment de la valeur philosophique de ces recherches paradoxales au premier abord, on leur a attribué encore une immense portée pratique : beaucoup de gens considèrent le calcul des probabilités comme un moyen scientifique d'investigation préalable dans les domaines inconnus de l'avenir, un véritable procédé de prévision, de divination. Un historien des sciences occultes dans un livre encore assez récent, Plytoff, fait une place au calcul des probabilités, parmi les sciences divinatoires, à côté de l'oniromancie, ou de la chiromancie, et lui consacre un chapitre entier, à ce titre [1].

Pour ceux qui ne prétendent pas se servir de cette branche des mathématiques pour soulever le voile de l'inconnu, ils ne laissent pas cependant de revendiquer pour elle des applications parfois inattendues. Des philosophes et des mathématiciens, et non des

(1) Plytoff, *Les sciences occultes*, Paris. J.-B. Baillière, in-12 1891. Ch. III, p. 47. 66.

moindres, tels que Laplace, Condorcet et Poisson, n'ont-ils pas cherché dans la mesure des probabilités une approximation suffisante pour leur permettre de rejeter les raisonnements plus ou moins exacts des juges chargés de donner leur avis dans les procès et dans les causes, n'ont-ils pas rêvé d'un jour où les innocents et les coupables attendraient leur sort du tirage d'une boule blanche ou noire d'une urne où on en mettrait en proportions définies, tirage réglé par le hasard, un hasard qu'on aurait au préalable enchaîné dans des formules mathématiques, rêve qualifié par Stuart Mill le scandale des mathématiques, et qui ne laissa pas d'indiguer le robuste bon sens de M. Bertrand.

Sans aller si loin, la plupart des savants admettent un usage du calcul des probabilités dans les sciences, où il devient un auxiliaire utile des méthodes de recherche, permettant parfois de découvrir l'existence de causes inconnues produisant des modifications ou des perturbations plus ou moins constantes. Et certes nos moyens de rechercher les causes des phénomènes sont souvent si restreints qu'un procédé de ce genre qui, s'il ne peut définir les causes inconnues en question, peut cependant les indiquer comme un X à résoudre, n'est pas à regarder comme négligeable, s'il est réellement capable de rendre de tels services.

C'est cette question de l'utilité, de la fécondité du calcul des probabilités que nous voulons examiner ici surtout. Ce sont ses applications qui nous préoccuperont constamment, et surtout ses applications dans les sciences les plus complexes, dans les sciences biologiques.

Cependant nous étudierons d'abord brièvement quelques formules mathématiques du calcul des probabilités, devant servir particulièrement aux applications concrètes, afin d'en examiner la valeur. Ensuite nous glisserons sur la question de l'application du calcul des probabilités à la connaissance de l'avenir ; et enfin nous aborderons le point capital de notre étude, à savoir les applications du calcul des probabilités à la recherche des causes et à celle des erreurs, particulièrement dans les sciences biologiques, la valeur des applications déjà faites, les conditions nécessaires de ces applications, et leur légitimité en général.

CHAPITRE II. — *Exposition des principes et des problèmes du calcul des probabilités.*

Qu'est-ce que c'est qu'une probabilité? — Les théorèmes des probabilités. — Le théorème de Bernoulli. — Le théorème de Stirling. — Probabilité de l'écart. — Le problème de Buffon. — Intégration des formules. — Données critiques de Bertrand. — L'écart probable. — L'écart moyen. — La probabilité des erreurs.

Dans l'examen du calcul des probabilités, nous ne chercherons pas à faire un exposé trop connu des définitions élémentaires. Nous voulons seulement mettre quelques points en lumière, qui nous paraissent trop souvent négligés, et sur lesquels nous reviendrons dans la suite.

La probabilité d'un événement se définit, comme on le sait, par le rapport du nombre des cas favorables à l'arrivée de cet événement au nombre total des cas possibles. Mais il y a ici un postulat indispensable, c'est à savoir l'égale possibilité de ces différents cas possibles ; sans cela, comme le fait remarquer M. Bertrand, on pourrait ne considérer que deux cas possibles : l'arrivée, et la non-arrivée de l'événement : un seul étant favorable, la probabilité serait toujours $\frac{1}{2}$.

Cependant il n'est pas toujours nécessaire d'avoir cette égale possibilité des différents cas, mais c'est à une condition expresse : il faut alors déterminer la probabilité de ces différents cas, et leur attribuer comme coefficient la valeur qui mesure cette probabilité propre pour chacun d'eux.

Il y a là un postulat initial absolument fondamental dans ce calcul; s'en passer équivaudrait à vouloir faire de la géométrie euclidienne sans le postulat d'Euclide. Nous verrons si ce postulat initial a toujours été scrupuleusement respecté.

Nous n'insisterons pas sur les théorèmes des probabilités totale et composée, et nous aborderons immédiatement le point capital du calcul, le théorème de Bernoulli ; il permet de mesurer pour un nombre donné d'épreuves m, la probabilité P pour qu'un événement E, d'une probabilité simple égale à p, la probabilité inverse étant égale à q, arrive un nombre donné de fois.

La combinaison la plus favorable se trouve être celle dans laquelle le nombre d'arrivées de l'événement E est mp et celle de l'événement inverse mq. Cette probabilité maxima est donnée par la formule

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}}.$$

Il faut noter que cette formule n'est obtenue que par un certain nombre d'approximations. La plus importante est l'application de la formule de Stirling, qui donne un équivalent plus simple des produits des premiers nombres. D'après elle,

$$1.2.3 \ldots . n = e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}.$$

Or cette formule n'est à peu près exacte que pour une valeur très considérable de n.

M. Bertrand donne la comparaison des deux termes pour $n = 20$. Voici les résultats :

$$1.2.3 \ldots . 20 = 2.432.902.008.176.640.000$$
$$e^{-20} 20^{20} \sqrt{40\pi} = 2.422.786.385.510.400.000.$$

Si le rapport des deux valeurs est 1,00417, il n'en est pas moins vrai que la différence absolue est énorme : elle est de l'ordre des dizaines de quatrillions.

On peut donc dire que pour $n = 20$, on a une approximation absolument insuffisante.

La probabilité maxima diminue à mesure que les épreuves augmentent, car m se trouve au dénominateur, c'est-à-dire que l'on trouvera un écart de plus en plus probable entre le nombre probable et le nombre réel d'arrivées de l'événement E. Soit h cet écart entre mp et mx.

On tire de la probabilité maxima, en faisant encore appel au théorème de Stirling, la probabilité de cet écart pour laquelle M. Bertrand donne la formule

$$(1) \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} e^{-\frac{h^2}{2mpq}}.$$

Il rend cette fonction de h continue en substituant à h une variable continue : il considère l'écart comme compris entre z et $z + dz$. La formule devient

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} e^{-\frac{z^2}{2mpq}} dz.$$

La probabilité alors pour que z soit inférieur à une limite donnée α, c'est-à-dire pour que l'écart soit compris entre $-\alpha$ et $+\alpha$ est

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\frac{z^2}{2mpq}} dz$$

et, en posant

$$t = \frac{z}{\sqrt{2mpq}},$$

$$P_\alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{2mpq}}} e^{-t^2} dt.$$

Dans chaque cas particulier, cette probabilité P_α s'obtiendra par les valeurs $\Theta(t)$ de la fonction

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt = \Theta(t).$$

La probabilité pour avoir un écart inférieur à une limite donnée α étant $\Theta(t)$, la probabilité pour avoir un écart égal ou supérieur à cette limite sera $1 - \Theta(t)$. C'est-à-dire que l'expression

$$1 - \Theta(t) \tag{2}$$

peut être considérée comme la probabilité d'un écart p si l'on pose

$$t = \frac{h}{\sqrt{2mpq}}.$$

Par conséquent, la formule de la valeur probable de l'écart donné par M. Bertrand sera équivalente à celle-ci.

On aura

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}}\, e^{-\frac{h^2}{2mpq}} = 1 - \Theta\left(\frac{h}{\sqrt{2mpq}}\right).$$

Et en effet, M. Bertrand semble considérer ces formules comme équivalentes, car il les emploie fréquemment l'une pour l'autre.

Nous voyons, au chapitre VII, page 124, qu'il résout ce problème.

Buffon a jeté une pièce de monnaie 4 040 fois et obtenu 2 048 fois face.

Quelle est la probabilité de l'écart $h = 28$?

$$mp = 4040 \times \frac{1}{2} = 2020. \quad mx = 2048. \quad mx - mp = 28.$$

Il donne d'abord la formule (1) de la probabilité de l'écart. Puis il cherche par l'intégrale la probabilité de l'écart moindre, qui lui donne $\Theta\,(0{,}62) = 0{,}619$.

Et il cherche par $1 - \Theta\,(t)$ la probabilité de l'écart égal ou supérieur à 28, qu'il trouve ainsi égale à 0,38.

Or cette assimilation des deux formules, et cette égalité que nous avons posée est tout simplement absurde : l'un des deux termes est une simple fonction, le second est le résultat d'une intégration. Or il n'y a pas d'assimilation possible entre l'intégrale et la fonction.

L'intégrale est à la fonction comme une aire est à une courbe. C'est ainsi qu'une courbe peut présenter un maximum sans que l'aire cesse de s'accroître.

Or justement la fonction (1) présente un maximum, ce qui, au point de vue du calcul des probabilités est absurde.

Prenons donc l'expression

$$(1) \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}}\, e^{-\frac{h^2}{2mpq}}$$

et formons sa dérivée.

Pour simplifier l'écriture, prenons

$$\sqrt{2mpq} = \frac{1}{x}.$$

La fonction (1) devient

$$y = \frac{x}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}.$$

La dérivée y' sera

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} + \frac{x}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} (-2h^2x).$$

En mettant $\frac{e^{-h^2x^2}}{\sqrt{\pi}}$ en facteur commun, on a l'expression

$$\frac{e^{-h^2x^2}}{\sqrt{\pi}} \left[1 - 2h^2x^2\right].$$

L'on voit aisément que le maximum est obtenu pour $2h^2x^2 = 1$, c'est-à-dire pour $x^2 = \frac{1}{2h^2}$, ou pour $x = \frac{1}{h\sqrt{2}}$.

Ainsi quand $x < \frac{1}{h\sqrt{2}}$, la fonction croît; quand $x > \frac{1}{h\sqrt{2}}$, la fonction décroît.

Si nous avons maintenant

$$\sqrt{2mpq} = \frac{1}{x}$$

ou

$$2mpq = \frac{1}{x^2},$$

ce maximum est obtenu pour

$$m = \frac{1}{2pqx^2} = \frac{h^2}{pq}.$$

Ainsi le maximum de la fonction (1) est obtenu pour une valeur de m égale à une fraction dont le numérateur est le carré de l'écart h et le dénominateur le produit de la probabilité p de l'événement E par la probabilité inverse q de l'événement E' $(p + q = 1)$.

C'est ainsi que, si l'on fait $p = q = \frac{1}{2}$, $h = 10$, on a, pour $m = 40$, par les calculs logarithmiques,

$$P(h) = 0{,}0009,$$

pour $m = 400 = \dfrac{h^2}{pq}$

$$P\,(h) = 0{,}024,$$

et pour $m = 4\,000$

$$P\,(h) = 0{,}00015.$$

Ainsi donc, la probabilité d'un même écart absolu de 10 qui, raisonnablement (et d'après M. Bertrand lui-même), doit croître avec le nombre des épreuves (et, en effet, la ruine des joueurs se fonde sur les oscillations de plus en plus grandes des écarts absolus, malgré la diminution des écarts relatifs), diminuerait, d'après cette formule quand on aurait dépassé $\dfrac{h^2}{pq}$.

Et, comme la formule nécessite m très grand, il y aurait décroissance continue de cette probabilité.

Il est curieux que l'on n'ait pas mis en lumière cette absurdité.

M. Bertrand, quand il applique sa formule, ne fait jamais varier m, mais h, et, en effet, ici il y a diminution continue de la fonction pour un accroissement continu de h, m étant constant.

C'est ainsi que M. Bertrand donne cet exemple [1] :

$$m = 1000. \quad p = q = \frac{1}{2}$$

On a, pour $h = 40$,

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1000\,\pi}}\,e^{-3,2} = 0{,}0010285\,;$$

pour $h = 60$,

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1000\,\pi}}\,e^{-7,2} = 0{,}00001883\,;$$

pour $h = 100$,

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1000\,\pi}}\,e^{-20} = 0{,}00000000052006.$$

Les valeurs données par la formule (2)

$$1 - \Theta\,(t)$$

[1] BERTRAND. *Calcul des probabilités*. Paris. 1889, p. 78, 79.

diffèrent donc de plus en plus, à mesure que m augmente, des valeurs de la formule (1).

C'est ainsi que dans les exemples que nous avons donnés plus haut, pour $m = 40$, nous avions :

$$P(h) = 0,0009,$$
$$1 - \Theta(t) = 0,0016\,;$$

pour $m = 400 = \frac{h^2}{pq}$,

$$P(h) = 0,024$$
$$1 - \Theta(t) = 0,32\,;$$

pour $m = 4\,000$,

$$P(h) = 0,00015$$
$$1 - \Theta(t) = 0,7556.$$

Et, dans l'exemple du problème de Buffon, de M. Bertrand, $m = 4040 > \frac{h^2}{pq}$, au lieu de $1 - \Theta = 0,619$ qu'il a trouvé, l'application de la formule (1) donne $P(28) = 0,008515$.

Ainsi donc, c'est la seule formule (2) : $1 - \Theta(t)$ qui doit être gardée pour mesurer la probabilité d'un écart (h), Θ mesurant la probabilité d'un écart moindre, c'est-à-dire encore la probabilité de la cause.

Mais l'application de cette formule nécessite m très grand.

Notons au passage que, dans le calcul des probabilités, quand on rencontre un écart, il faut en chercher la probabilité, et qu'il y a une formule pour la probabilité des causes. Cela n'est pas inutile, car nous aurons à y revenir, quand nous traiterons des applications du calcul.

Il y a d'ailleurs un écart probable, c'est-à-dire qui a probabilité égale d'être ou de n'être pas surpassé ; c'est l'écart α défini par l'équation :

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2mpq}} = 0,476936,$$

ou

$$\alpha = 0,47693\,\sqrt{2mpq},$$

car

$$\Theta\,(0,47693) = \frac{1}{2}.$$

Quant à l'écart moyen, considéré comme donnant la valeur probable de l'écart, dans une série m d'épreuves, il est de

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{mpq} = 0,79789\sqrt{mpq}.$$

C'est ainsi que, dans le problème de Buffon, la valeur probable de l'écart était de 24,7, alors que l'écart réel était de 28. L'écart probable était de 21 environ. Le rapport des deux écarts doit être de 0,8463. Cela est encore très important à mettre en relief : le calcul des probabilités admet un écart, et un écart probable contre le nombre probable d'arrivées mp d'un événement E, et le nombre réel mx d'arrivées de cet événement, et non seulement ce calcul l'admet, mais il l'exige. Une très grande régularité est considérée comme l'indice d'une cause régulatrice corrigeant les écarts nécessaires dus au hasard.

M. Bertrand [1] a proposé de chercher quel est l'écart dans la proportion des naissances des filles et des garçons, qu'il y a 10 000 à parier contre 1 de franchir au moins une fois en cent ans.

Il trouve cet écart égal à 99.

Si l'on a $9,2\,n = 100$, c'est-à-dire $\frac{1}{n} = 0,092$, il y a 10 000 à parier contre 1 pour que l'événement de probabilité $\frac{1}{n}$ arrive une fois au moins sur 100 épreuves.

Or la probabilité d'un écart, pendant une année, plus grand que λ sur 14 000 naissances, est :

$$1 - \Theta\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2mpq}}\right).$$

Cela doit être égal à 0,092, et par conséquent,

$$\Theta\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2mpq}}\right) = 0,908.$$

Il faut alors $\frac{\lambda}{\sqrt{2mpq}} = 1,19.$

On en déduit $\lambda = 99$.

---

[1] BERTRAND, p. 162, 163.

« Si dans un siècle, conclut M. Bertrand, l'écart n'avait pas une seule fois dépassé 99, si sur 14000 naissances annuelles, le nombre des garçons s'était maintenu entre 7300 et 7100, une cause régulatrice serait presque certaine ; il y a 10000 à parier contre 1, *a priori*, pour que le hasard, sur cent épreuves tentées dans la même urne, ne maintienne pas une telle régularité (1). »

Ainsi, quand la probabilité d'un écart égal ou supérieur à l'écart réel est très forte, il y a probabilité égale d'une cause régulatrice, de même que, quand cette probabilité est très faible, il y a probabilité égale d'une cause perturbatrice, et dans la mesure par conséquent où la valeur réelle est inférieure ou supérieure à la valeur probable de l'écart.

Il est donc absolument illégitime, de par le calcul des probabilités lui-même, de compter sur une régularité absolue des événements dus au hasard, et de leur répartition proportionnelle à leurs probabilités respectives. Nous verrons que c'est encore un point que l'on oublie trop souvent, si du moins ceux qui parfois prétendent appliquer le calcul des probabilités se sont jamais donné la peine de l'apprendre.

Il y a encore une formule fournie par le calcul des probabilités et qui peut servir à de nombreuses applications, c'est celle qui concerne l'erreur probable et la probabilité des erreurs dans les observations scientifiques.

La loi de probabilité des erreurs qui dépendent de tant de facteurs n'est nécessairement accessible au calcul que d'une façon très imparfaite. Euler, Bernoulli, Lagrange, Laplace ont fait des hypothèses que les faits ont démenties.

C'est à la loi établie par Gauss que l'on s'est rallié.

Elle part de ce postulat que la valeur la plus probable entre plusieurs mesures d'une grandeur est la moyenne des grandeurs obtenues, postulat qui n'est vérifié qu'approximativement.

On obtient comme formule de probabilité d'une erreur comprise entre z et $z + dz$,

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 z^2} dz.$$

(1) *Ibid.*, p. 163.

Celle d'une valeur plus petite que α, en valeur absolue, sera :

$$\frac{2k}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha} e^{-k^2z^2}\, dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{k\alpha} e^{-t^2}\, dt = \Theta\,(k\alpha).$$

Connaissant la valeur de l'erreur probable, on peut en fonction de celle-ci trouver la probabilité d'une erreur.

L'erreur probable r est donnée par deux formules dont les résultats divergent à la troisième décimale :

$$r = 0{,}8453\, \frac{\Sigma\delta}{n}$$

$$r = 0{,}6745 \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n-1}},$$

h est le nombre des épreuves.

$\Sigma\delta$ est la somme des erreurs résiduelles qui doivent être connues (on a là un moyen de mesurer le degré de confiance d'une série d'observations ; $\frac{1}{r^2}$ sera le poids d'une observation).

On peut donc ainsi connaître l'erreur probable, qu'il y a probabilité $\frac{1}{2}$ de surpasser ou de ne pas surpasser.

M. Nikolaus Wuich a construit sur ces données un tableau reproduit par Bertrand.

Il donne la probabilité d'une erreur en fonction de l'erreur probable, sur 10 000.

Ainsi il y a probabilité 5 000 $\left(\frac{5\,000}{10\,000} = \frac{1}{2}\right)$ pour 1 fois l'erreur probable ; probabilité 54 pour 0,01 fois l'erreur probable ; probabilité 9 993 pour 5 fois l'erreur probable (ou, suivant la notation habituelle, probabilités 0,5 ; 0,0054 ; 0,9993).

Enfin, en faisant les mesures $= n$, la moyenne $= m$, la variation moyenne $= v$ $\left(\text{moyenne des écarts par rapport à la moyenne} = \frac{\Sigma\delta}{n}\right)$, et, si l'on a deux moyennes de mesures analogues, on atteint une différence d.

Quelle est, peut-on se demander, la probabilité de cette valeur d considérée comme une erreur.

On considère la précision K comme égale à $\frac{1}{v\sqrt{\pi}}$.

On fait la moyenne générale M et t, considéré comme le produit de l'erreur par la précision devient $t = K\sqrt{n}(M - m)$, et

$$t = \frac{n_1\sqrt{n}\,dv}{\sqrt{\pi}\,(nv_1^2 + n_1 v^2)}$$

avec des simplifications.

La probabilité d'avoir une mesure égale à m sera égale à $1 - \Theta(t)$, ce qu'un tableau peut nous fournir.

Ainsi donc, non seulement le calcul des probabilités fournit un écart probable et la probabilité d'un écart entre le nombre probable et le nombre réel d'arrivées d'un événement, mais encore une erreur probable et la probabilité d'une erreur, c'est-à-dire d'un écart entre une valeur observée et une valeur réelle (et non plus probable), le plus souvent ignorée (et à laquelle on substitue la moyenne des valeurs, considérée comme la valeur la plus probable).

Ce dernier calcul présente encore bien plus d'éléments subjectifs que le premier. En tout cas il y a lieu de ne pas confondre, ce que nous verrons qu'on a fait, l'erreur et l'écart.

Et maintenant, que peut-on tirer de ce calcul de la probabilité des erreurs ? Nous verrons ce qu'on en a tiré. Nous verrons ensuite si l'on en peut légitimement tirer quelque chose.

Chapitre III. — *Le calcul des probabilités peut-il servir à la connaissance de l'avenir.*

Opinion de Laplace. — Opinion de M. Poincaré. — Application du calcul de probabilité aux jeux de hasard ; exemple. — Les probabilités partielles. — Les opinions et les critiques de Cournot.

Le calcul des probabilités peut-il servir à la connaissance de l'avenir ? Nous avons vu qu'un historien des sciences occultes en faisait un mode de divination spécial. Seulement, ce n'est pas là une autorité suffisante. Mais nous nous trouvons souvent en présence de joueurs qui dans leurs mises s'efforcent de suivre les indications du calcul des probabilités. Si l'on joue à la roulette, par exemple, lorsque la rouge est sortie six fois de suite, on met sur la noire avec une quasi-certitude qu'elle sortira, la probabilité d'une sortie consécutive de sept rouges étant très faible. Le calcul des probabilités légitime-t-il ce raisonnement ? Laplace distingue expressément deux cas dans la probabilité des événements futurs : si l'événement attendu dépend des événements antérieurs, il y a une probabilité nouvelle, tirée de la connaissance de cet événement, pour l'événement à venir. Si par exemple on a dans une urne une boule blanche et une noire, la probabilité d'en tirer une quelconque est $\frac{1}{2}$. Mais si l'on tire une boule blanche, sans la remettre, la probabilité de tirer la noire devient égale à 1. C'est une certitude. Dans le second cas, l'événement nouveau est indépendant des événements anciens, sa probabilité reste alors constante.

Si, après avoir tiré la boule blanche de l'urne, je l'y remets, la probabilité de tirer la boule noire reste $\frac{1}{2}$. Il en est ainsi toujours pour des jeux comme pile ou face, ou comme la roulette.

Dans ce cas, dit Laplace, « le passé ne peut répandre aucune lumière sur l'avenir et il serait absurde d'en tenir compte » (1).

Mais Laplace ne donne pas une justification suffisante de son assertion. Le calcul des probabilités juge des sorties respectives à pile ou face, quand elles sont passées, et attribue une probabilité infiniment faible à une sortie constante de pile par exemple ; pourquoi ne le pourrait-il faire dans l'avenir ?

M. Poincaré s'occupe aussi de la question. Parlant des joueurs qui mettent sur la noire après une sortie consécutive de six rouges, il dit : « En réalité leur probabilité de gain reste $\frac{1}{2}$. L'observation montre, il est vrai, que les séries de sept rouges consécutives sont très rares, mais les séries de six rouges suivies d'une noire sont tout aussi rares. Ils ont remarqué la rareté des séries de sept rouges, s'ils n'ont pas remarqué la rareté des séries de six rouges et une noire, c'est uniquement parce que de pareilles séries frappent moins l'attention (2) ».

(1) LAPLACE. *Essai philosophique sur le calcul des probabilités*, p. 18.

(2) POINCARÉ. Réflexions sur le calcul des probabilités. *Revue générale des Sciences*, 5 août 1899, p. 267.

Le raisonnement de M. Poincaré ne nous paraît pas absolument juste. Cette assimilation d'une série de sept rouges à une une série de sept sorties décomposée en six rouges et une noire n'est pas exacte. Car cette série de six rouges et une noire ne représente en fait qu'une série de six rouges, l'apparition de la noire ne faisant que marquer la fin de cette série ; une série de sorties d'une couleur ne peut en effet se clôturer que par une sortie de la couleur inverse. (Une série n'est série que si elle est homogène, elle est close par une apparition hétérogène.) Dire qu'une série de six rouges et une noire est aussi rare qu'une série de sept rouges, c'est dire en fait qu'une série de sept rouges consécutives est aussi probable qu'une série de six rouges consécutives. Or ceci est contraire au calcul des probabilités. La probabilité d'une série est égale au produit des probabilités partielles de chaque terme, où à la puissance n^{me} de cette probabilité, n représentant le nombre de termes de la série. Il est donc évident que la probabilité d'une série de sept termes est moindre que d'une série de six termes.

Et nous pouvons encore nous demander pourquoi ce n'est pas le joueur qui a raison.

A vrai dire, si le calcul des probabilités ne légitime pas la spéculation des joueurs, c'est parce que les probabilités initiales ne sont applicables que pour plus d'un terme, qu'alors il faut faire appel au théorème de Bernoulli et que l'application du théorème de Bernoulli réclame un grand nombre d'expériences. Or la probabilité porte ici non sur un grand nombre d'événements futurs, mais sur un seul. Dès lors le calcul des probabilités n'est plus applicable. Il y a parfois des rencontres extraordinaires dans une série très limitée d'événements, mais les grands nombres régularisent tout, et rien ne permet plus alors de s'en apercevoir, en sorte que ce qui est vrai de la totalité ne l'est pas des parties, et qu'en voulant passer de l'une aux autres on risque de tomber dans des erreurs très grossières.

Mais, semble-t-il, le calcul des probabilités reste applicable à la prévision des rapports respectifs de différents événements, pour un nombre considérable de ceux-ci.

Il est évident que, si l'on a 10.000 numéros dans une urne, par exemple, dont la probabilité respective de sortie est par conséquent de $\frac{1}{10\,000}$, pour celui qui sortira avec une probabilité aussi faible, et qui sortira pourtant nécessairement s'il n'est pas spécifié, car il faut bien qu'un sorte, on ne pourra se récrier, comme pour l'apparition d'un phénomène absolument extraordinaire ; car cet événement est isolé. Le calcul des probabilités ne donnait aucune indication sur la sortie de ce numéro, dont la probabilité de $\frac{1}{10\,000}$ s'est transformée subitement en une certitude égale à l'unité. Mais le calcul des probabilités pourra donner des indications sur le nombre de sorties de ce numéro pour deux ou trois millions d'expériences.

Cournot proteste, en une page très remarquable, contre cette probabilité partielle, incomplète et douteuse des événements futurs, relative à un petit nombre d'épreuves, d'autant plus que voulant subordonner le calcul des probabilités à l'expérience, la probabilité ne pourrait jamais que servir d'expression aux événement passés.

« La probabilité mathématique prise objectivement, ou conçue comme mesurant la possibilité des choses, ne peut en général être déterminée que par l'expérience. Si le nombre des épreuves d'un même hasard croissait à l'infini, elle serait déterminée exactement avec une certitude comparable à celle de l'événement dont le contraire est physiquement impossible. Pour un nombre très grand d'épreuves, la probabilité n'est encore donnée qu'approximativement ; mais on est autorisé à considérer comme extrêmement peu probable que la valeur réelle diffère notablement de la valeur conclue des observations. En d'autres termes, il arrivera très rarement que l'on commette une erreur notable en prenant pour la valeur réelle la valeur tirée des observations. Dans le cas même où le nombre des épreuves est peu considérable, on a voulu tirer, de certaines considérations mathématiques, des formules pour évaluer numériquement la probabilité des événements futurs d'après les événements observés, mais de telles formules n'indiquent plus que des probabilités subjectives, bonnes tout au plus à régler les conditions d'un pari ; elles deviendraient fausses si on les appliquait comme on l'a fait souvent bien à tort à la détermination de la possibilité des événements. »

En fin de compte, on peut admettre que le calcul des probabilités a une valeur au point de vue de l'avenir pour un grand nombre d'épreuves, mais seulement si l'on accorde à ce calcul une portée *a priori* dépassant les limites d'une expérience fondamentale qui n'a d'ailleurs jamais été systématiquement faite ; cette valeur restera cependant toujours approximative, car, pour que l'application de la formule Stirling dans les calculs soit à peu près exacte, il faut des nombres d'épreuves très considérables, et pour des nombres d'épreuves très considérables, on a des écarts probables de plus en plus considérables eux aussi, au point de pouvoir dépasser tout nombre donné. Pour un nombre infini d'épreuves, l'écart absolu atteindrait lui-même une valeur infinie d'un infini d'ordre inférieur, mais irréductible à toute mesure, à tout chiffre fini.

On voit donc que cette valeur du calcul des probabilités, ainsi limitée dans tous les sens d'aussi stricte façon, peut être considérée comme à peu près négligeable.

CHAPITRE IV. — *Les applications scientifiques du calcul des probabilités.*

La probabilité des causes. — Les applications en Psychologie ; exemples. — Calcul de probabilité et télépathie ; exemples. — Applications dans les Sciences Physiques ; exemples. — Les applications en Anthropologie ; exemples. — Les applications en médecine. — Les applications dans les sciences sociales. — Les applications réelles sont beaucoup plus rares qu'on ne pourrait le croire.

On a fait des applications scientifiques du calcul des probabilités. Nous allons tâcher de donner une idée des principales, très rapidement, et tout d'abord la probabilité des causes.

On trouverait dans Bertrand de nombreuses applications de ce genre, émanant en général de probabilistes qui s'en servaient comme d'illustrations de leurs théories et proposaient des problèmes pour familiariser avec les formules. Mais ce ne sont pas des applications méthodiques.

C'est surtout en psychologie, à notre connaissance, que ces applications ont prétendu se faire.

On a même affirmé la nécessité de se servir du calcul dans cette science. Laplace disait déjà que c'était dans les sciences les plus complexes, où l'investigation est le plus difficile, que l'application du calcul était le plus nécessaire.

« On ne peut pas faire un pas dans la psychologie expérimentale, dit M. V. Henry, sans avoir recours aux principes du calcul des probabilités » (1).

Et l'auteur, après avoir exposé les principes généraux du calcul ainsi que le théorème de Bernoulli, en s'inspirant de très près de Bertrand (cela est tellement apparent que M. V. Henry n'a même pas cru utile de le citer) donne les formules de probabilité d'un écart, mettant en première ligne l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}}\, e^{-\frac{h^2}{2mpq}}$$

dont nous contestons l'exactitude pratique.

Puis il donne quelques exemples dans lesquels il fait le calcul par la formule $1 - \Theta\,(t)$.

En particulier, en présentant à un sujet des lettres (voyelles) qu'il ne voit pas consciemment, sur 120 expériences pour chaque série, on cherche combien de fois le sujet, qui doit dire une lettre au hasard, tombe juste suivant que les lettres ont une grandeur plus ou moins élevée. On cherche le nombre probable de coïncidences, et la probabilité de l'écart $\Theta\,(t)$; on a par l'inverse de la probabilité de l'écart, la probabilité d'une cause.

L'écart maximum obtenu est de 43 (nombre probable : 20 nombre réel : 63). Or pour un écart de 17, la probabilité de l'écart n'est déjà que de 3 p. 100 000.

Mais avant qu'on ait ainsi revendiqué dans la méthode une place à de tels calculs, des applications avaient été déjà faites. C'est par un procédé de ce genre que M. Richet a prétendu prouver la réalité de la suggestion mentale. Il faisait deviner au sujet, qui devait parler au hasard, le nom d'une carte connue par une personne. Il comparait le nombre de coïncidences réelles au nombre de coïncidences probables. Et alors prenant la différence,

(1) V. Henry. Le Calcul des Probabilités en Psychologie. *Année Psychologique* 2e année (1895), 1896, p. 466.

l'écart, et le rapportant au nombre des sorties probables, M. Richet l'érigeait en probabilité d'une cause qu'il déclarait être la suggestion.

Voici un cas par exemple :

Sur 840 tirages, le sujet tombe 250 fois sur la couleur de la carte. Le nombre de sorties probables était de 203, dit M. Richet. La probabilité était de $\frac{13}{52}$, contre $\frac{39}{52}$, c'est-à-dire de $\frac{1}{4}$ (Ce nombre de sorties probables aurait donc dû être de 210). J'ai un écart, dit M. Richet, de 52, 52 est le quart de 208, donc la probabilité pour l'existence de la suggestion est de $\frac{1}{4}$.

L'application du calcul des probabilités, est ici tout à fait mauvaise. Il fallait faire appel à la formule de la probabilité de l'écart $1 - \Theta\,(t)$.

Faisons appel à cette formule.

On a

$$t = \frac{h}{\sqrt{2\pi m p q}}, \quad pq = 0{,}19,$$
$$\sqrt{2\pi \times 840 \times 0{,}19} = 32\,;$$

50 est l'écart exact (840 — 810)

$$\frac{56}{32} = 1{,}56,$$
$$\Theta\,(1{,}56) = 0{,}9726.$$

La probabilité de la cause n'est plus d'un quart, mais de 97 p. 100.

On voit que l'application de la formule, n'est pas négligeable. Elle serait ici tout à fait favorable au calcul de M. Richet.

Il y a des cas où il n'en serait pas ainsi.

Il y aurait lieu en particulier d'appliquer ces formules exactes, au calcul des probabilités à toutes ces études et enquêtes que l'on fait à l'heure actuelle sur les phénomènes anormaux, hallucinations télépathiques et autres et qui jouent constamment du calcul des probabilités [1].

---

[1] Cf in *Procedings of Society for Psychical Research*, t. VI, 1889.
Ch. Richet. *Further experiments in hypnotic lucidity or clairvoyance*, p. 16-67, 72-75, 82.

D'après l'enquête de la Société des recherches psychiques de Londres, on arrive pour la question des hallucinations à des résultats tels que ceux triomphalement exposés par M. Flammarion [1] par l'intermédiaire de M. Dariex :

On n'a relevé qu'une hallucination visuelle sur 248 personnes. Soit pour la probabilité d'un tel cas : $\frac{1}{248}$.

La probabilité de mort pour un adulte d'âge indéterminé dans une période de 24 heures est de

$$\frac{22}{1000}\,\frac{1}{365}$$

$$\frac{1}{248}\,\frac{22}{1000}\,\frac{1}{365} = \frac{1}{4.114.545}.$$

Et l'on conclut que l'hypothèse d'une action télépathique réelle est 4 114 545 fois plus probable que l'hypothèse d'une coïncidence fortuite. Voilà une interprétation de résultats qui ne se soucie guère des règles les plus élémentaires du calcul des probabilités.

Mais voici qui est mieux encore.

M. Flammarion extrait des *Phantasms of the Living* un cas précis et qu'il décrit longuement, puis il applique le calcul des probabilités.

Il n'y a pas eu un intervalle de plus de 12 minutes entre l'hallucination et la mort, période contenue 120 fois dans 24 heures soit $\frac{1}{120}$.

Il s'agissait d'un homme de 48 ans.

La probabilité officielle de la mort est alors de

$$\frac{13,5}{1000}.$$

L'on a donc

$$x = \frac{1}{248}\,\frac{13,5}{1000}\,\frac{1}{365}\,\frac{1}{120} = \frac{1}{804.622.222}$$

H. SIDGWICK. *Experiments in thought transference*, p. 128.

MYEAS. *Das Doppel-ich*, p. 109, 110.

L. TAYLOR. *Experimental Comparison bethween chance in Correspondance of diagrams*, p. 398, 401, 405, t. III, 1885, p. 190, 200; t. IV, 1886-1887, p. 189, 208.

Ed. GEWATT. *The Calculus of Probabilitie applied to psychical Research.*

RAPHAEL CHANDOS. *Revue des Deux Mondes*, 1887, p. 211.

(1) C. FLAMMARION. *L'Inconnu et les Problèmes Psychiques*. Ch. IV, note p. 239-241.

et la probabilité pour l'existence de l'action télépathique devient de 804 622 222. On ne pourra pas dire que notre remarque, que nous avons souvent répétée était inutile, à savoir que le calcul des probabilités n'était applicable qu'aux grands nombres ; qu'il réclame des grands nombres d'épreuves, et ne se contente pas de ceux dont on surcharge ses conclusions. Or ici, il y a une épreuve et une seule. Supposons un milliard de boules différentes dans une urne. Nous en tirons une particulière. La probabilité pour que nous tirions cette boule par hasard était $\frac{1}{1\ 000\ 000\ 000}$. Nous allons conclure qu'il y a un milliard à parier contre un pour l'existence d'une cause à laquelle nous attribuerons tel nom plus ou moins surnaturel que nous voudrons, cause qui a produit le tirage de cette boule. Notre raisonnement vaudra celui de M. Flammarion, et nous pourrons monter plus loin dans les zéros accumulés.

Vraiment il est permis de s'amuser, mais il faut être bien naïf pour prendre pareilles choses au sérieux.

Laissons donc tous les calculs du même genre, et revenons aux applications plus sérieuses.

C'est la probabilité des erreurs qui est le plus souvent employée dans les diverses sciences.

L'astronomie sur laquelle, faute de compétence, nous ne nous permettrons pas d'insister, fait constamment appel à la théorie des erreurs et des poids pour caractériser les observations. Cette science d'observation, si proche des mathématiques pures, devait être tentée de mathématiser en quelque sorte l'observation elle-même, de déchiffrer les phénomènes subjectifs perturbateurs. A côté de la mesure excellente de l'équation personnelle, elle a encore fait appel à la probabilité des erreurs variables, qui ne peuvent être soumises à une formule d'observation, étant inconstantes par nature. On ne manque jamais, en rapportant des observations faites, de donner leur précision et leur poids.

Il n'y a guère d'application de ce genre dans les sciences physico-chimiques.

Cependant il ne faudrait pas croire qu'elles en sont véritablement exclues. Pour les parties les moins précises de ces sciences, on fait parfois appel aux probabilités, et Terquem et Damien (1) dans leur traité de Physique expérimentale consacrent une partie de leur introduction concernant la méthode à la théorie de la probabilité des erreurs.

Se fondant sur la théorie, telle qu'ils l'ont exposée, M. Paillot (2), élève de M. Damien, dans une thèse récente de l'Université de Lille, en recherchant les forces électromotrices d'aimantation, appelé à mesurer le diamètre des bobines employées, a tenu compte des erreurs relatives à la moyenne, en prenant les carrés des différences.

Il obtenait ainsi la somme de ces carrés $\sum e^2$ et il en tirait l'erreur probable du résultat par la formule

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\Sigma e^2}{m(m-1)}}.$$

Cette erreur s'est toujours trouvée chez lui de l'ordre des dix millièmes.

Ce qui prouvait qu'on ne pouvait, dans ses évaluations, pousser l'approximation au delà du quatrième ordre des unités décimales.

Le calcul des probabilités n'a été employé chez cet auteur que pour cette évaluation du diamètre des bobines ; il s'en est dispensé dans beaucoup d'autres et, en effet, on peut dire que dans les sciences physiques, le calcul des probabilités est l'exception.

En revanche, pour des sciences de mesures plus complexes, telle que l'anthropologie, nous retrouvons ces applications plus nombreuses (3).

---

(1) TERQUEM et DAMIEN. *Physique expérimentale*, in-8, 1888, Introduction, ch. II, p. 66-105.

(2) PAILLOT. *Recherches sur les forces électromotrices d'aimantation*, in-8, 1901. Lille, p. 23-52.

(3) De nombreuses applications ont été faites dans les sciences naturelles, rares parce que la mesure elle-même y est rare. Des courbes théoriques ont été faites, par exemple pour les variations des types en botanique afin de les comparer aux courbes réelles, exactement comme en anthropologie pour les variations des types considérés comme tels.

Cf. AMANN. Application du calcul des probabilités à l'étude de la variation d'un type végétal. *Bull. herb. Boissier*. 1896, Ch. IV, p. 577-590.

C'est Quételet qui, le premier, a tenté des applications effectives de la théorie des erreurs aux mensurations anthropologiques. Il extrait par exemple du treizième volume de l'*Edinburgh medical journal* les résultats de la mensuration des circonférences des poitrines de 5 738 soldats écossais. Le calcul de l'erreur probable permit à Quetelet de conclure qu'il pouvait parier un contre un qu'une personne peu exercée se tromperait de 33 millimètres (1 pouce) en mesurant une poitrine de plus de 1 mètre (40 pouces) de circonférence. Et alors 5 738 mesures prises sur une seule personne se grouperaient avec la même régularité que les 5 738 mesures prises sur les soldats écossais. Quételet passe de l'écart réel à l'erreur probable. Nous reviendrons sur ce point. Herschell (1), en faisant les mêmes calculs, ne trouva pas les mêmes résultats.

On sait que c'est Quételet (2) qui mit en honneur la conception de l'*homme moyen*, un peu ridiculisée, depuis lors. Il se livra en effet à la statistique et aux moyennes avec ardeur, voulant que pas un domaine social n'échappât à la mesure avec comme criterium la théorie des probabilités.

Il fut en effet tout à fait enthousiasmé par ce calcul qu'il déclarait déjà très insuffisamment appliqué. « Le calcul des probabilités, dit-il, n'est que l'instrument qui doit servir à régulariser les travaux d'exploitation ; mais il devient indispensable dans les recherches auxquelles nous voulons nous livrer. Il sert en effet à distribuer avec avantage la série de nos observations, à continuer la valeur des documents dont nous faisons usage, à les continuer ensuite de manière qu'ils s'écartent le moins possible de la vérité, et à calculer, en définitive, le degré de confiance qu'on peut attacher aux résultats obtenus (3). »

Depuis, des applications nouvelles se sont faites, avec un oubli fréquent des essais de Quételet.

Ed. Goldstein a publié en 1883 une étude sur les applications du calcul des probabilités à l'anthropologie (4), ne faisant guère

(1) HERSCHELL. Sur la théorie des probabilités et ses applications aux sciences physiques et sociales. *Revue d'Edimbourg*, 2 juillet 1890.

(2) QUÉTELET. *Physique sociale*, in-8, 1869. T. I.

(3) QUÉTELET, *id.*, p. 137.

(4) Édouard GOLDSTEIN. *Revue d'Anthropologie*. 2e série, XI, 1883, p. 704-718.

que résumer un travail allemand de Stieda [1]. Il s'occupe surtout de la sériation dans les moyennes qui lui paraît nécessaire, car on fait parfois des moyennes avec des éléments hétérogènes. Mais comment mesurer cette hétérogénéité. Il fait appel à la théorie des erreurs qu'il expose d'abord en général, donnant les formules de mesure de l'erreur probable.

La somme des erreurs résiduelles $\sum \delta$ est la somme des écarts *d* par rapport à la moyenne, les écarts représentant pour lui les erreurs, la variation moyenne. Il donne le tableau très complet de Wuich. Il définit le poids, la précision, etc., et applique comme exemple seulement, ces formules à des mesures anthropologiques comparatives sur des juifs autrichiens. Il indique que, pour les moyennes, il y aurait lieu de comparer deux courbes ainsi définies.

On fait une courbe du nombre de fois que chaque mesure a été rencontrée, à partir de la plus faible.

Puis, la moyenne étant déterminée, on cherche combien de fois, sur un nombre égal d'épreuves, chaque mesure devait arriver d'après le calcul des probabilités fondé sur l'erreur probable : la probabilité est relative, d'après le tableau de Wuich, au multiple de l'erreur probable, qui est ici l'écart par rapport à la moyenne, soit une valeur égale à deux fois l'erreur probable, qui s'écarte de la moyenne du double de l'écart probable, je trouve comme probabilité de cet écart 82,3 p. 100 ; donc sur 100 cas, il ne devra y en avoir que 17,7 qui atteindront ou dépasseront cet écart. Je détermine un point de la courbe probable. Je chercherai le point de la courbe réelle, qui pourra être de 20 par exemple, et je comparerai les deux courbes.

Quand les deux courbes diffèrent beaucoup, je dois dire que d'autres éléments que des erreurs sont venus troubler mes moyennes, et par conséquent que mes éléments mesurés ont des différences réelles qui ne permettent pas de les comparer, qu'il faut donc les ranger dans des séries, dans des moyennes différentes. Je mets en lumière l'hétérogénéité de ma moyenne, et je n'ai

(1) Dr Ludwig STIEDA. Ueber die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der anthropologischen Statistik. *Archiv für Anthropologie*, 1888, t. 14.

plus qu'à la diviser en séries homogènes, représentant des types anthropologiques : il ne doit pas y avoir entre des types de cette espèce des écarts dépassant notablement l'indice probable d'oscillation, l'erreur probable.

Une application pratique du calcul des probabilités a été faite tout récemment par M. Binet en anthropologie (1).

Ayant pris des mensurations craniennes dans deux groupes d'enfants, l'un d'intelligents, l'autre d'inintelligents, il fit les moyennes, et trouva des différences entre ces moyennes considérées *a priori* comme homogènes (M. Binet n'a pas fait la courbe de Stieda et Goldstein).

En particulier, il applique la formule de probabilité d'un écart de moyennes aux moyennes du diamètre frontal :

« Etant donné, dit-il, la différence d'une mesure que présentent deux groupes de sujets, il est possible de savoir si cette différence moyenne résulte des écarts opératoires de mensuration ou résulte des dimensions réelles qui ont été mesurées.

On voit que la question est d'une importance capitale. La formule à employer est la suivante :

$$T = \frac{n_1 \sqrt{n.d.v}}{n v_1^2 + n_1 v^2}. »$$

Appliquée au diamètre frontal, cette mesure lui donne à ce qu'il rapporte, une probabilité de 80 p. 100 pour que la différence provienne d'autre chose que des erreurs opératoires, 20 p. 100 pour qu'elle soit due à ces simples erreurs opératoires.

Pour le détail de la formule, M. Binet renvoyait à un second article de V. Henry (2) qui traitait cette fois de la théorie des moyennes et des erreurs, et qui s'attachait surtout à la probabilité de l'écart entre deux moyennes, plutôt qu'à l'écart interne, pourrait-on dire, relatif à la moyenne. C'est en effet un problème qui s'ajoute à celui de Stieda : Quand on a constitué des moyennes homogènes d'où l'on a exclu toute hétérogénéité trop forte,

---

(1) Binet. Mensuration de la tête vivante. *An. Psych.* 7e Ann. 1901, p. 359, 360.

(2) V. Henry. Quelques applications du Calcul des Probabilités en Psychologie. *An. Psych.* 2e année (1898), 1899, p. 153-160.

comment reconnaître maintenant le degré d'hétérogénéité de deux moyennes prises dans leur ensemble et qu'on considère par avance comme hétérogènes ; le sont-elles vraiment au point de constituer deux moyennes distinctes, et de ne pouvoir se fondre en une seule, de représenter enfin deux types différents. Tout d'abord il fallait amener l'unité interne dans les types. Maintenant il faut juger de la dualité externe de ces types.

La première application servait à déceler une hétérogénéité dans la moyenne ; la deuxième sert à déceler une homogénéité de deux moyennes.

C'est dans les temps de réaction surtout que se présente cette question en psychologie : on élimine arbitrairement et sans appel en général au calcul des probabilités, toute mesure qui s'écarte isolément par trop de la moyenne, sans qu'il y ait de règle de cette élimination, autre qu'une appréciation subjective, et le type étant ainsi constitué dans une moyenne, on veut le comparer à une autre moyenne, soit d'un autre sujet, soit d'un autre état du même sujet. A quel moment la différence entre ces moyennes sera-t-elle significative de la spécificité de ces types, de la réalité des différences objectives ? C'est à cela que doit répondre la série des probabilités des erreurs dans les moyennes.

E.-W. Scripture [1] a consacré un article au même sujet, faisant, lui aussi, la théorie des applications du calcul, mais non des applications proprement pratiques. Et c'est surtout aux temps de réaction qu'il songe, ce faisant.

On voit que les applications réelles sont beaucoup plus rares qu'on ne pourrait le croire, étant donnée la vogue du calcul des probabilités qu'on cite à tout propos, et auquel on fait constamment appel théoriquement. Cette abstention de la pratique est-elle ignorance, est-elle défiance du bon sens vis-à-vis du prestige des chiffres ?

Il est bien certain pourtant que l'on applique couramment, sinon le détail, du moins le principe du calcul des probabilités, dans la vie ordinaire, mais c'est une pratique empirique, et nous

---

[1] E.-W. Scripture. Computation of a set of simple direct measurement. *Studies from the Yale psychological Laboratory*, vol. VIII, 1900, in-8°. New Haven.

traitons des applications scientifiques du calcul des probabilités. Aussi ne nous sommes-nous pas arrêtés aux applications qu'en font souvent les médecins dans le traitement de certaines maladies, car ils ne recourent à cela que par une ignorance plus ou moins avouée, réalisant pour la vie humaine ce que Laplace rêvait pour la sécurité civique en proposant de juger par probabilités. Eux soignent par les mêmes principes, et les discussions sur l'intervention chirurgicale dans l'appendicite par exemple, roulent le plus souvent sur des probabilités extraites de quelques cas, quand ce n'est pas d'un cas.

Et cette application médicale n'est pas récente. Avant la découverte de la vaccine, on multiplia les considérations probabilistes sur les dangers et les avantages de l'inoculation, toujours en considérant des hommes « moyens » comme Bertrand le relève ironiquement, des hommes-types, des hommes en soi; D'Alembert (1) en a fait aussi la remarque très judicieuse.

Enfin les compagnies d'assurances tiennent un grand compte des probabilités fournies par les statistiques; elles opèrent d'ailleurs sur des grands nombres et vivent de la constance assez régulière de la nature, que les probabilités attribuent à la puissance « Hasard » alors que, dans la monotonie universelle, il est plus simple d'admettre que les mêmes causes produisent toujours les mêmes effets. Aussi les résultats assez heureux des compagnies d'assurance ne peuvent guère se reporter sur le calcul des probabilités, d'autant qu'on ne fait appel qu'aux probabilités simples et non aux formules compliquées du calcul.

(*A suivre.*)

N. Vaschide (Paris). H. Piéron (Paris).

(1) D'Alembert, *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie. 4e éd.* Amsterdam, 1770, in-12. — *Réflexions philosophiques et mathématiques sur l'application du Calcul des probabilités à l'inoculation*, p. 305-386.