Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 5 (1903)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Kapitel: 1. Sur les formules de Bonnet, Enneper et Kommerell.

1. Sur les formules de Bonnet, Enneper et Kommerell.

La formule de *Bonnet :*

$$\frac{1}{R} \pm \frac{d\omega}{ds} = \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right) \sin\varphi \cos\varphi \tag{1}$$

qui détermine la torsion géodésique de toute courbe d'une surface, comprend, comme cas particuliers, celles d'*Enneper* pour les lignes asymptotiques :

$$R = \pm\sqrt{-\rho_1\rho_2} \tag{2}$$

et de M. *Kommerell* pour les géodésiques (*Archiv der Math. und Physik*, 3e Reihe, B. I, S. 116-7) :

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right)\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho}\right); \tag{3}$$

mais cette circonstance apparaît bien plus clairement, si l'on donne à la formule de Bonnet (1) une autre forme. En effet, éliminons φ entre (1) et l'équation :

$$\frac{\cos\omega}{\rho} = \frac{\cos^2\varphi}{\rho_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho_2};$$

on a :

$$\frac{\cos\omega}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} = \sin^2\varphi\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right), \quad \frac{1}{\rho_2} - \frac{\cos\omega}{\rho} = \cos^2\varphi\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right),$$

d'où la formule (1) se transforme en la suivante :

$$\left(\frac{1}{R} \pm \frac{d\omega}{ds}\right)^2 = \left(\frac{\cos\omega}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right) \cdot \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{\cos\omega}{\rho}\right); \tag{1'}$$

sous cette forme, on voit tout de suite qu'elle comprend la formule (2) pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, et la formule (3) pour $\omega = 0$. Plus généralement, pour les courbes $\omega =$ const., elle devient :

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{\cos\omega}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right)\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{\cos\omega}{\rho}\right). \tag{1''}$$

Enfin, pour les lignes de courbure, elle donne le théorème dit de *Lancret :*

$$\frac{1}{R} = \pm\frac{d\omega}{ds}.$$

A propos de la démonstration des formules (1), (2) et (3), je voudrais observer que la manière la plus courte de la faire, c'est de partir des équations :

$$\cos\omega = \frac{\zeta - p\xi - q\eta}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

ou :

$$\lambda = \frac{\pm p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \mu = \frac{\pm q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \nu = \frac{\mp 1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

ou enfin :

$$\xi = \frac{\pm p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \eta = \frac{\pm q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \zeta = \frac{\mp 1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

respectivement, que l'on différentie et ajoute.

2. *Remarque sur les lignes de courbure.*

Dans toute ligne de courbure on a :

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{d\omega}{ds},$$

d'où :

$$\omega = \pm \int \frac{ds}{R} + c;$$

d'autre part :

$$\rho_1 \cos\omega = \rho,$$

ou :

$$\frac{\cos\omega}{\rho} = \frac{1}{\rho_1},$$

Donc :

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\cos\left(\pm\int \frac{ds}{R} + c\right)}{\rho},$$

et de même :

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{\cos\left(\pm\int \frac{ds'}{R'} + c'\right)}{\rho'}.$$

3. *Quand la trajectoire d'un mobile est plane, l'hodographe l'est aussi, quel que soit le mouvement*, car de la relation :

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

on tire :

$$A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} = 0;$$