Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 5 (1903)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'ENSEIGNEMENT ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

Autor: Lémeray, E.-M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-6626

SUR L'ENSEIGNEMENT ÉLÉMENTAIRE

DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

Malgré leurs applications à des questions fondamentales de géométrie, de mécanique pure ou appliquée, de physique, les fonctions elliptiques ne font pas partie de l'enseignement élémentaire. Il en résulte que les physiciens, les ingénieurs, et ceux en général, qui ne sont pas mathématiciens de profession, sont privés d'un instrument de travail dont ils comprennent pourtant l'utilité; sans doute, bon nombre d'entre eux ont étudié les fonctions elliptiques; mais l'exposé qui leur en a été fait visait à être aussi complet que possible, tout en étant rapide et le temps leur a manqué pour se les assimiler d'une façon suffisante et surtout durable.

Les méthodes d'exposition employées sont basées soit sur l'étude d'une équation différentielle, soit sur la construction *a priori* d'une fonction doublement périodique ; mais par suite de leur caractère général et abstrait, elles exigent de longues réflexions. Une étude hâtive en est impossible. Il suffit sur ce point, de rappeler l'anecdote de Sylvester et de son professeur (1). Par conséquent si l'on ne dispose que d'un temps limité, il faut se borner aux propriétés essentielles.

Les fonctions elliptiques se sont introduites dans l'analyse sous la forme d'équations différentielles; mais pour l'enseignement, il est permis de prendre un autre point de départ, si l'on y trouve avantage. Un débutant acquérerait difficilement une idée

(1) *Revue des Sciences pures et appliquées*. T. VIII, 1897, nº 17, E. Picard. Notice sur James Joseph Sylvester.

nette de la fonction sin x par exemple, si on la lui présentait comme la fonction inverse de l'intégrale

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}};$$

il est intéressant de considérer comme exercice, cette définition; mais il ne viendra à personne l'idée de la prendre comme point de départ de l'étude des fonctions circulaires au lieu de la définition usuelle. Les fonctions elliptiques sont plus complexes que les fonctions circulaires puisque celles-ci n'en sont qu'un cas limite ; il est donc désirable qu'on aborde leur étude par une méthode aussi facile, si faire se peut, que celle qui a servi pour le cas particulier. Or en partant d'un problème élémentaire sur les tangentes aux coniques, on peut arriver très facilement à l'intégrale d'Euler, à la notion de la double périodicité, au problème de la multiplication par un nombre entier, c'est-à-dire aux propriétés fondamentales des fonctions elliptiques et à ce qui est nécessaire pour leurs applications les plus usuelles.

Ce problème consiste à étudier les points de contact d'une ellipse avec une ligne polygonale qui lui est circonscrite en même temps qu'elle est inscrite dans une ellipse homofocale à la première.

Soit une ellipse E dont le demi-grand axe est pris pour unité et dont la demi-distance focale est k. Soit μ un point fixe de E et P le point où la tangente à E en μ coupe le petit axe; considérons l'ellipse E′ homofocale à E et passant en P, désignons par M un point mobile sur E′, par R l'une des extrémités de la polaire de M par rapport à E. Cela posé, si l'on définit le point fixe μ et les points mobiles M et R par les compléments α, φ et ω de leurs anomalies excentriques, on trouve presque immédiatement la relation

$$\cos\alpha = \cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}. \tag{1}$$

Sous forme rationnelle, elle devient

$$2-\sin^2\alpha-\sin^2\omega-\sin^2\varphi-2\cos\alpha\cos\omega\cos\varphi + k^2\sin^2\alpha\sin^2\omega\sin^2\varphi = 0 \tag{1'}$$

et *est symétrique en* α, ω *et* φ. En la résolvant par rapport à α, par exemple, puis en posant

$$\sin\alpha = a \qquad \sin\omega = x \qquad \sin\varphi = x'$$

on trouve

$$a = \frac{x\sqrt{1-x'^2}\,\sqrt{1-k^2x'^2} \pm x'\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-k^2x^2}}{1-k^2x^2x'^2}\ ; \tag{2}$$

telle est donc la relation entre les abcisses du point μ et des points mobiles M et R; le double signe correspondant aux deux points R extrémités de la polaire.

En différentiant (2), a étant constant, on obtient l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-k^2x^2}} \pm \frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2}\,\sqrt{1-k^2x'^2}} = 0\ ; \tag{3}$$

(2) est donc une intégrale algébrique de l'équation (3). C'est l'intégrale d'Euler. Si l'on revient aux notations primitives (3) devient

$$\frac{d\omega}{\sqrt{1-k^2\sin^2\omega}} \pm \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 0\ ; \tag{4}$$

(1) est donc une intégrale de (4). C'est l'intégrale obtenue par Lagrange.

Argument elliptique. — Revenons à la figure précédente que nous appellerons la figure I et considérons une ligne polygonale inscrite à E', circonscrite à E et tangente à celle-ci, à l'une des extrémités du petit axe. Désignons par $x_0 = 0$ l'abcisse de ce point, puis par x_2, x_4, ... x_{2n} .., celles des points de contact successifs obtenus en partant dans un sens déterminé, à droite du petit axe, par exemple; n opérations (une opération consistant dans le passage d'un point de contact au point de contact suivant) nous fournissent une grandeur x_{2n}.

Nous allons voir que l'on peut définir une variable z et une fonction de cette variable telles que lorsque la variable prend des valeurs proportionnelles à 0, 1, 2. ., n, la fonction prenne les valeurs x_0, x_2, x_4..., x_{2n}...

A cet effet considérons : le point Q de l'ellipse E ayant même anomalie excentrique que M, la tangente à E en Q, et les intersections de cette tangente avec les tangentes issues de M. On trouve que les lieux de ces deux intersections sont une seule et même ellipse E″ ayant pour demi-axes les racines carrées de

$$\frac{1+\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}{1+\cos\alpha}, \qquad \frac{(1-k^2)\left(1+\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\right)}{\sqrt{1-k^2\sin\alpha}+\cos\alpha},$$

dirigées respectivement suivant OX et la direction perpendiculaire.

La différence de ces deux quantités est k^2; *donc E″ est homofocale à E et E′*. La ligne polygonale inscrite à E″, circonscrite à E et la touchant au même sommet que la précédente, nous fournit ainsi deux séries de points; d'abord ceux d'abcisses x_2, x_4, x_{2n}... déjà obtenus, puis une deuxième série de points intermédiaires. Nous pouvons continuer ainsi, obtenir de nouvelles ellipses E‴, E$^{\text{IV}}$, homofocales aux précédentes et insérer entre deux points d'abcisses x_{2n}, $x_{2(n+1)}$ un nombre $2^\gamma - 1$ de points intermédiaires, γ étant aussi grand que l'on voudra.

Considérons maintenant l'ellipse E et toutes celles qui lui sont homofocales; la tangente à E en un sommet du petit axe détermine à droite de cet axe un point N sur l'une des ellipses de la famille.

La deuxième tangente à E issue de N touche E en un point B; soit β son abcisse; l'ellipse qui passe en N peut être définie par le paramètre β. On démontrerait aisément que si l'on continue la ligne polygonale dont NB est un côté, les projections sur OX des différentes polaires des sommets tels que N sont toutes plus petites que β et vont même en décroissant du moins tant qu'on n'atteint pas l'axe OX. Dès lors soit x l'abcisse d'un point de E situé dans le premier quadrant; on pourra toujours déterminer une ellipse de paramètre suffisamment petit β et un entier λ suffisamment grand pour qu'après un nombre λ d'opérations on parvienne en un point de E dont l'abcisse diffère de x d'une quantité aussi petite que l'on voudra et qui sera plus petite que β. Nous représenterons par z la limite du produit $\lambda\beta$ quand β tend vers zéro.

A toute valeur de x correspond une valeur de z (et même une infinité; car à celle que nous venons de définir il faut ajouter celles qui sont égales à celle-ci augmentée d'un multiple de 4K, K étant la limite du produit $\lambda\beta$ quand on choisit $x = 1$, c'est-à-dire quand la ligne polygonale embrasse le quart de l'ellipse) et réciproquement à toute valeur de z correspond une valeur de x et une seule. On dit que z est l'argument elliptique de module k et l'on écrit

$$x = sn\,(k.\,z)$$

ou simplement

$$x = sn\,(z).$$

On peut comparer avec z l'angle ω complément de l'anomalie excentrique du point dont l'abcisse est x; on dit que ω est l'amplitude de z; ce qui s'écrit

$$\omega = \mathrm{am}\, z\,;$$

on a donc

$$x = \sin\omega = \sin \mathrm{am}\, z = sn\, z.$$

D'après la définition de z, on a

$$sn\, 0 = 0 \text{ et } \lim \frac{sn\, z}{z} = 1 \text{ pour } z = 0.$$

Equation différentielle de snz. — Revenons à la relation (2) que nous avons déduite de (1'); cette dernière étant symétrique en α, ω et φ, en la résolvant par rapport à $\sin\varphi = x'$, on a :

$$x' = \frac{x\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-k^2a^2} + a\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}{1-k^2a^2x^2}. \tag{2'}$$

Formant la différence $x' - x$, la divisant par a et passant à la limite (pour $a = 0$) on obtient

$$\lim \frac{x'-x}{a} = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}\,;$$

le premier membre peut s'écrire $\frac{dx}{dz}$; en effet si l'on pose $x = sn z$ $a = sn\,\Delta z$ on en tire $x' = sn\,(z + \Delta z)$ on a donc

$$\frac{x'-x}{a} = \frac{sn\,(z+\Delta z) - sn\, z}{sn\,\Delta z}\,;$$

la limite du second membre est la même que celle du rapport

$$\frac{sn\,(z+\Delta z) - sn\, z}{\Delta z}$$

puisque la limite de $\frac{sn\, z}{z}$ est 1 pour $z = 0$. La fonction $x = sn\, z$ a donc pour équation différentielle

$$\frac{dx}{dz} = \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - k^2 x^2}. \tag{5}$$

En représentant z en fonction de x par la notation

$$z = \arg.\, sn\, x$$

on voit que l'équation (3) d'Euler a pour intégrale

$$\arg.\, sn\, x \pm \arg.\, sn\, x' = C^{te}.$$

Le théorème d'addition de la fonction $sn\, z$ nous est donné par la relation (2′) où x', x et a représentent respectivement

$$sn\,(z + p), \quad sn\, z, \quad sn\, p,$$

p étant comme z un argument elliptique.

On peut remarquer que si les deux ellipses E, E′ au lieu d'être homofocales étaient concentriques, semblables et avaient mêmes directions axiales ou encore se réduisaient à deux cercles concentriques, $sn\, z$ dégénérerait en $\sin z$, l'équation différentielle (5) et les théorèmes d'addition se réduiraient à

$$\frac{dx}{dz} = \sqrt{1 - x^2}, \qquad x' = x\sqrt{1 - a^2} + a\sqrt{1 - x^2}.$$

Si les deux coniques étaient un cercle et une ellipse ayant pour petit axe un diamètre du cercle ; $sn\, z$ dégénérerait en $Th\, z$.

Courbe d'Halphen. — Jusqu'ici l'argument z est considéré comme la limite du produit $\lambda\beta$; on peut le représenter par une surface en employant la représentation géométrique d'Halphen ou une autre analogue, la suivante par exemple que nous appellerons la figure II.

En posant $x = \sin \omega$, l'équation (5) devient

$$\frac{d\omega}{dz} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega},$$

d'où

$$z = \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - k^1 \sin^2 \omega}}.$$

Soit un cercle de rayon 1, une ellipse dont les demi-axes sont 1 et $\frac{1}{k'}$, $(k' = \sqrt{1-k^2})$, considérons la courbe G dont le rayon vecteur est la moyenne proportionnelle entre ceux du cercle et de l'ellipse ; si l'on prend pour axe polaire le petit axe de l'ellipse et si ω représente l'angle formé avec lui par le rayon vecteur ρ ; l'équation de l'ellipse est

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega}},$$

la courbe G a donc pour équation

$$\rho = \frac{1}{(1 - k^2 \sin^2 \omega)^{\frac{1}{4}}}$$

et son aire déterminée par l'angle ω est

$$\frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega}} ;$$

elle est donc égale à la moitié de l'argument elliptique z; d'ailleurs

$$\sin \omega = x = sn\, z.$$

Périodicité. — En continuant la ligne polygonale (figure I) inscrite à E′ et circonscrite à E ; on finira par trouver des points de contact voisins de ceux déjà obtenus ; on conçoit même que l'on pourrait déterminer l'ellipse E′ de telle sorte qu'après un certain nombre d'opérations on retombe exactement sur les premiers points de contact obtenus ; la fonction $sn\, z$ est donc périodique ; on le voit d'ailleurs d'une façon bien plus nette sur la figure II. Si K représente l'aire comprise entre l'axe polaire, un axe perpendiculaire et la courbe G, on voit que $sn\, z$ reprend les mêmes valeurs quand z augmente d'un multiple de 4K par suite

$$sn\,(z + 4\,\mathrm{K}) = sn\, z ;$$

on voit aussi que la fonction ne fait que changer de signe si z augmente de 2K ; la quantité 2K est la demi-période ; elle joue le même rôle que π pour les fonctions circulaires.

Multiplication de l'argument par un nombre entier. — La multiplication de l'argument par un entier m contient deux questions : étant donné $sn\, z$ trouver $sn\, mz$; étant donné un secteur z de la courbe G, trouver l'angle déterminant un secteur m fois plus grand; le premier de ces problèmes peut se résoudre en faisant usage du théorème d'addition; de plus la figure I en fournit une représentation géométrique; il est clair que si l'on détermine l'ellipse E' de telle sorte que l'abcisse de μ soit égale à la valeur donnée de $sn\, z$ que nous pouvons supposer positive; en construisant la ligne polygonale ayant un premier contact en μ et en tournant dans un sens convenable, les abscisses des points de contact successifs auront pour valeurs $sn\, 3z$, $sn\, 5z$... $sn\,(2n+1)\, z$. En construisant entre les deux mêmes ellipses une seconde ligne polygonale ayant un contact au sommet du petit axe de E, les abscisses des contacts successifs seront $sn\, 2z$, $sn\, 4z$... $sn\,(2n\, z)$.

Maintenant que l'on connaît la valeur de $sn\, mz$ on peut la reporter sur la figure II et déterminer ainsi le rayon vecteur et l'angle (à un multiple de 2π près) qui détermine sur l'aire embrassée par G, un secteur mz; si ξ est la valeur trouvée de $sn\, mz$ on aura simplement à résoudre l'équation

$$\frac{\sin \omega}{\sqrt[4]{1-k^2 \sin^2 \omega}} = \xi,$$

ce qui donnera pour l'angle ω cherché quatre valeurs faciles à discuter.

Valeurs imaginaires de l'argument. — On peut, soit admettre dans une première étude, soit démontrer assez facilement en s'appuyant sur le théorème d'addition, que lorsque la variable est purement imaginaire, la fonction sn est aussi purement imaginaire si on lui impose la condition d'être une fonction analytique [1]. Nous écrirons donc

$$sn\left(z\sqrt{-1}\right) = \sqrt{-1}\ \mathrm{S}n\,(z) = x\sqrt{-1}$$

où $\mathrm{S}n\, z$ représente une fonction réelle de z et où l'on pose $x = \mathrm{S}n\, z$.

---

[1] Voir *Nouvelles Annales*, 3e série, T. XIX, juin 1900. Exposition géométrique de quelques propriétés fondamentales des fonctions elliptiques de première espèce.

Le théorème d'addition et l'équation différentielle si l'on y remplace a, x et x' par $a\sqrt{-1}$, $x\sqrt{-1}$, $x'\sqrt{-1}$, deviennent

$$x' = \frac{x\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+k^2a^2}+a\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+k^2x^2}}{1-k^2a^2x^2},$$

$$\frac{dx}{dz} = \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+k^2x^2}.$$

Une induction naturelle conduit à penser que la nouvelle relation entre a, x et x' doit être la solution d'un problème analogue au précédent. En effet, dans le premier problème, l'équation des ellipses rapportées à deux axes rectangulaires est

$$B^2x^2+A^2y^2=A^2B^2,$$

avec

$$A^2-B^2=k^2.$$

En changeant x^2 en $-x^2$ on a les hyperboles.

$$-B^2x^2+A^2y=A^2B^2$$

avec la même relation entre A et B. Elles ne sont pas homofocales [1], elles ont les mêmes axes que les ellipses de la figure 1. En répétant les mêmes constructions que dans le premier problème on arrive à des résultats analogues en ce qui concerne la périodicité, la multiplication de l'argument; mais on arrive à voir que la fonction $\mathrm{S}nz$ devient infinie pour certaines valeurs de z; dans les calculs, les fonctions circulaires sin cos sont remplacées par les fonctions hyperboliques $\mathrm{S}h$ et $\mathrm{C}h$. La représentation de l'argument par une surface se fera d'une manière analogue à celle du premier cas; on considérera le rayon vecteur hyperbolique [2] et l'argument hyperbolique au lieu du rayon vecteur ordinaire et de l'angle. Nous rappelons que si les coordonnées d'un point sont x, y son rayon vecteur hyperbolique est $\sqrt{y^2-x^2}$.

---

[1] Si l'on considérait des hyperboles homofocales on aurait bien une relation de même forme, mais k serait plus grand que 1 car il n'est autre que l'excentricité de ces hyperboles.

[2] Voir Laisant. *Essais sur les fonctions hyperboliques*. Gauthier-Villars 1874. Cela montre une fois de plus l'intérêt qu'il y aurait à introduire franchement dans l'enseignement l'usage des fonctions hyperboliques.

L'analogue de la courbe G est alors une courbe G′ dont le rayon vecteur hyperbolique est la moyenne proportionnelle entre ceux de l'hyperbole équilatère de demi-axes égaux à 1 et de l'hyperbole ayant pour demi-axes 1 et $\frac{1}{k'}$; le demi-axe transverse étant celui qui est égal à l'unité; l'aire comprise entre la courbe, son asymptote et l'axe transverse est représentée par K′ et Snz a pour période réelle 2 K′.

Double périodicité de snz. — De ce qui précéde on conclut que la fonction snz a deux périodes; l'une réelle et égale à 4 K, l'autre imaginaire et égale à $2\ K'\sqrt{-1}$; par suite le plan des z est partagé en rectangles par des parallèles à l'axe réel et à l'axe imaginaire, quand z occupe dans ces rectangles des positions relatives semblables la fonction prend des valeurs égales; dans chaque rectangle la fonction devient deux fois nulle et deux fois infinie. Ses zéros sont $2m\mathrm{K} + 2n\mathrm{K}'\sqrt{-1}$; ses infinis sont $2m\mathrm{K} + 2(n+1)\,\mathrm{K}'\sqrt{-1}$ où K et K′ sont les deux intégrales

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad\qquad \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+k^2x^2)}}$$

que l'on peut calculer par des séries; m, n sont des entiers quelconques.

Variations de la fonction snz. — Pour se rendre compte de la manière dont varie snz quand z décrit un chemin déterminé dans son plan, il suffit d'examiner deux cas principaux, celui où z décrit une parallèle à l'axe réel et celui où il décrit une parallèle à l'axe imaginaire et de chercher les courbes décrites par la fonction. Les points de celles-ci peuvent être obtenus au moyen du compas.

Pour le premier cas on posera :

$$z = u + v_0\sqrt{-1}\,, \qquad sn(u+v_0\sqrt{-1}) = \mathrm{U} + \mathrm{V}\sqrt{-1}\,,$$

en développant le second membre au moyen du théorème d'addition, puis en séparant le réel et l'imaginaire et posant

$$sn\,u = \xi, \qquad \mathrm{S}n\,v_0 = \mathrm{V}_0,$$

on a

$$U^2 = \frac{\xi^2 (1 + V_0^2)(1 + k^2 V_0^2)}{(1 + k^2 \xi^2 V_0^2)^2}, \qquad V^2 = \frac{V_0^2 (1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)}{(1 + k^2 \xi^2 V_0^2)^2}.$$

En éliminant ξ^2 on trouve

$$(6) \qquad k^2 (U^2 + V^2)^2 - \left[\frac{1 + k^2 V_0^2}{1 + V_0^2} + k^2 \frac{1 + V_0^2}{1 + k^2 V_0^2}\right] U^2$$
$$- \left[\frac{1}{V_0^2} + k^2 V_0^2\right] V^2 + 1 = 0.$$

Tel est donc le lieu décrit par snz dans le premier cas, V_0 est l'ordonnée d'un point où la courbe coupe l'axe imaginaire. Pour le second cas on posera

$$z = u_0 + v\sqrt{-1}, \quad sn\,(u_0 + v\sqrt{-1}) = U + V\sqrt{-1},$$

on développera encore $sn\,(u_0 + v\sqrt{-1})$ puis posant $Snv = \eta_1$, $sn\,u_0 = U_0$ et séparant le réel de l'imaginaire on a

$$U^2 = \frac{U_0^2 (1 + \eta_1^2)(1 + k^2 \eta_1^2)}{[1 + k^2 U_0^2 \eta_1^2]^2}, \qquad V^2 = \frac{\eta_1^2 (1 - U_0^2)(1 - k^2 U_0^2)}{[1 + k^2 U_0^2 \eta_1^2]^2};$$

l'élimination de η_1 donne [1]

$$(7) \qquad k^2 (U^2 + V^2)^2 + \left[\frac{1 - k^2 U_0^2}{1 - U_0^2} + k^2 \frac{1 - U_0^2}{1 - k^2 U_0^2}\right] V^2$$
$$- \left[\frac{1}{U_0^2} + k^2 U_0^2\right] U^2 + 1 = 0;$$

U_0 est l'abscisse d'un point où la courbe coupe l'axe réel. On remarque que l'équation (7) se tire de (6) en changeant respectivement

$$V_0^2,\ V^2 \text{ et } U^2 \text{ en } -U_0^2,\ -U^2 \text{ et } -V^2.$$

On pourrait démontrer non seulement que les systèmes (6) et (7) sont bien orthogonaux comme l'exige la condition d'analyticité imposée à la fonction, mais encore que les courbes (7) sont à elles-mêmes leurs propres trajectoires orthogonales. Si le paramètre U_0^2 est compris entre 1 et $\frac{1}{k^2}$ on a les courbes relatives au

---

(1) *Loc. cit.*

premier cas; s'il a une autre valeur positive on a les courbes relatives au second cas.

Ces courbes sont susceptibles d'une définition simple. A cet effet, on mettra l'équation (7) sous la forme

$$f(U.V) = C^{te}$$

en la résolvant par rapport à la constante arbitraire U_0. Le calcul ne présente aucune difficulté et l'on trouve

$$(8) \qquad C^{te} = U_0^2 = \left[\frac{1 + R^2 \pm \sqrt{(1 + R^2)^2 - 4U^2}}{2U}\right] \times \left[\frac{1 + k^2R^2 \pm \sqrt{(1 + k^2R^2)^2 - 4k^2U^2}}{2k^2U}\right]$$

où nous avons posé

$$R^2 = U^2 + V^2.$$

Désignons par F et F′ les deux points de l'axe des U ayant pour abscisses $+1$ et -1; par G et G′ les deux points du même axe ayant pour abcisses $+\frac{1}{k}$ et $-\frac{1}{k}$; soit U, V un point du plan : f et f' ses distances à F et F′, le lieu des points pour lesquels le rapport $f : f'$ est le même qu'au point considéré est un cercle; on trouve que ce cercle coupe l'axe réel aux points d'abscisses

$$\frac{1 + R^2 \pm \sqrt{(1 + R^2)^2 - 4U^2}}{2U}.$$

De même si l'on désigne par g et g' les distances du point U, V à G et G′ le lieu des points pour lesquels le rapport $g : g'$ est le même qu'au point considéré, est un autre cercle qui coupe l'axe réel aux points d'abcisses

$$\frac{1 + k^2R^2 \pm \sqrt{(1 + k^2R^2)^2 - 4k^2U^2}}{2k^2U}.$$

Ces valeurs sont précisément les facteurs du second membre de l'équation (8). Dès lors si nous représentons d'une manière générale par i les abscisses d'intersection du premier cercle avec l'axe OU, par j les points analogues pour le second cercle; les courbes (7) auront pour équation

$$U_0^2 = ij;$$

on voit que l'on obtiendra autant de points que l'on voudra de la courbe coupant en $\pm$ U_0 l'axe réel, au moyen des intersections de deux cercles faciles à construire, l'un arbitraire du paramètre i, l'autre dont le paramètre est $j = \frac{U_0^2}{i}$.

Théorème de Poncelet. — A propos de la figure I nous avons dit que l'on pouvait concevoir l'ellipse E' telle qu'après un certain nombre d'opérations on retombe exactement sur des points de contact déjà obtenus; il est clair qu'il suffit pour cela que le point μ d'abscisse $\sin \alpha = sn\, p$ soit choisi de telle sorte que p soit un diviseur de la période 4 K ou plus généralement soit commensurable avec 4 K; mais alors si l'ellipse répond à cette condition, on pourra prendre pour sommet du polygone un point quelconque de E' et les polygones ainsi obtenus auront tous le même nombre de côtés; une conclusion analogue se présente quand l'on considère les hyperboles dont nous avons parlé; on arrive ainsi à deux cas, très particuliers à la vérité, des théorèmes de Poncelet, mais qu'on peut évidemment généraliser par projectivité. Il conviendra de signaler que l'équation algébrique par laquelle on déterminera $snp\left[p = \frac{m}{n}\text{K},\ m,\ n \text{ entiers}\right]$ n'est pas résoluble sauf dans des cas très particuliers.

Les considérations précédentes peuvent s'étendre presque sans changements aux fonctions à multiplicateur σ de Weierstrass (¹). En les complétant par quelques notions sur les fonctions *cn*, *dn* et en général sur celles qui sont reliées à *sn* par une équation algébrique; par la réduction des intégrales dépendant de la racine carrée d'un seul polynome du quatrième degré aux trois types canoniques, par la transformation de Landen, par les théorèmes fondamentaux sur les arcs d'ellipse et d'hyperbole qui ne présentent aucune difficulté théorique, on aura les éléments nécessaires pour les applications les plus usuelles et pour pouvoir utilement employer les tables. L'étude des fonctions considérées comme définies par les équations différentielles au moyen des intégrales curvilignes, les développements en séries et en produits, les fonc-

(¹) Les coniques sont deux ellipses ou deux hyperboles ayant mêmes directions axiales, mais non homofocales.

tions de Jacobi, la formation *a priori* d'une fonction admettant deux périodes, les problèmes de la division et de la transformation en général seraient réservés à l'enseignement supérieur.

Dans l'enseignement moderne on laisse au second plan les fonctions *sn cn dn* et l'on considère d'abord la fonction p de Weirstrass. Si dans un enseignement préparatoire on préfère commencer aussi par l'étude de cette fonction, on peut suivre une méthode analogue à celle qui vient d'être exposée. Nous nous bornerons à dire que e_1, e_2, e_3, désignant trois constantes dont la somme est nulle, on considérera les deux paraboles dont les équations en coordonnées rectangulaires sont :

$$(\mathrm{P}) \qquad y = \pm\sqrt{x}. \qquad (\mathrm{P}') \qquad 2\alpha y = (e_3 - e_1)(e_2 - e_1) + x \pm 2\mathrm{S}\sqrt{x}$$

où

$$\mathrm{S} = \sqrt{(\alpha - e_3 + e_1)(\alpha - e_2 + e_1)}$$

et où α est une constante arbitraire. Alors si l'on pose

$$\alpha = p(\zeta, e_1, e_2, e_3) - e_1,$$

si l'on prend sur P un point d'ordonnée égale à $p(z) - e_1$ et si l'on considère une ligne polygonale partant de ce point ayant ses côtés tangents à P et ses sommets sur P', les ordonnées des points de contact successifs augmentées de e_1, seront

$$p(z \pm \zeta), \qquad p(z \pm 2\zeta), \ldots . \qquad p(z \pm n\zeta), \ldots .$$

les deux signes correspondant aux deux directions possibles qu'on peut suivre en partant du premier point.

E.-M. Lémeray.

(Saint-Nazaire.)