Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 5 (1903)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE PROBLÈME N° 2 DE M. DAVID HILBERT

Autor: Padoa, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-6625

LE PROBLÈME N° 2 DE M. DAVID HILBERT

Immédiatement après la communication *Sur les problèmes futurs des Mathématiques*, faite par M. Hilbert au Congrès international des Mathématiciens à Paris le 8 août 1900 [1], M. Peano déclarait [2] que ma communication, déjà annoncée pour le surlendemain, sur *Un nouveau système irréductible de postulats pour l'Algèbre* [3] aurait répondu au problème n° 2 de M. Hilbert : *De la non-contradiction des axiomes de l'Arithmétique* [4].

M. Hilbert n'a pas répondu, et il n'aurait pu le faire avant d'écouter ma communication ; malheureusement le surlendemain M. Hilbert était absent.

Presque deux années se sont écoulées du Congrès à la publication du compte rendu. En attendant, M. Hilbert aurait pu connaître la solution d'une question qui l'intéressait si vivement en 1900, en s'adressant à M. le Secrétaire du Congrès ou à moi pour avoir les épreuves de ma communication. Et il lui aurait suffi d'en lire l'*Avant-propos* [5] pour comprendre que son problème n° 2 [6] n'était qu'une causerie, qui se pouvait supprimer [7].

Maintenant que le compte rendu a paru et que M. Hilbert

[1] Compte rendu du deuxième Congrès int. des mathématiciens. Paris, Gauthier-Villars. 1900, p. 58-114.

[2] *Ibidem*, p. 21.

[3] *Ibidem*, p. 249-256.

[4] *Ibidem*, p. 71-74.

[5] *Ibidem*, p. 249, 250.

[6] Voir *L'Enseignement Mathématique*, 1902, p. 386.

[7] Personne ne l'en aurait empêché ; en effet M. Hilbert a apporté d'autres modifications à l'original de sa communication (*ibidem*, p. 58 note).

semble vouloir continuer à garder le silence, je crois rendre service aux jeunes étudiants, en leur évitant d'accepter l'invitation de M. Hilbert à méditer sur des questions qui ont été résolues depuis longtemps.

*
* *

M. Hilbert commence ainsi :

« Lorsqu'il s'agit de poser les principes fondamentaux d'une science, l'on doit établir un système d'axiomes renfermant une description complète et exacte des relations entre les concepts élémentaires de cette science. Ces axiomes sont en même temps les définitions de ces concepts élémentaires ; aucune affirmation relative à la science dont nous examinons les principes fondamentaux ne sera admise comme exacte, à moins qu'on ne puisse la tirer des axiomes au moyen d'un nombre fini de déductions. Si l'on considère les choses plus exactement, la question suivante se pose : *Certaines affirmations contenues dans des axiomes ne sont-elles pas dépendantes les unes des autres, et, par suite, ces axiomes ne renferment-ils pas des parties communes superflues que l'on doit supprimer si l'on veut obtenir un système d'axiomes complètement indépendants ?*

« Mais avant tout, parmi tant de questions soulevées par l'examen des axiomes, je regarde comme la plus importante celle-ci : *Démontrer que les axiomes ne sont pas contradictoires ; c'est-à-dire démontrer qu'en se basant sur les axiomes l'on ne pourra jamais arriver à des résultats contradictoires au moyen d'un nombre fini de déductions logiques.* »

Ma communication commence ainsi :

« Dans l'*Introduction logique à une théorie déductive quelconque* qui précède notre *Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers*, nous avons analysé la structure formelle d'une théorie déductive quelconque, pour établir les principales conditions de sa perfection logique et les règles pratiques pour reconnaître si ces conditions se trouvent vérifiées dans une théorie donnée.

« Maintenant, nous ne faisons que rappeler ces conditions et énoncer ces règles, dont l'étude appartient à la logique générale, pour une application mathématique à l'analyse des principes de l'Algèbre.

« D'abord il faut *déclarer* quels sont les *symboles* dont on fait usage dans la théorie *sans les définir* (*symboles non définis*) et *énoncer* les *propositions* (*définitions exceptées*) qu'on accepte dans la théorie *sans les démontrer* (*postulats*) (¹).

« *Les postulats doivent être* **compatibles**; c'est-à-dire qu'ils ne doivent pas se *contredire*.

« Pour **démontrer** *la compatibilité d'un système de postulats, il faut trouver une interprétation des symboles non définis, qui vérifie simultanément tous les postulats.*

« *Le système des postulats doit être* **irréductible;** en d'autres termes, les *postulats* doivent être *absolument indépendants*; c'est-à-dire : il faut qu'*aucun des postulats* ne puisse être *déduit des autres;* ou bien encore : *il faut qu'en remplaçant séparément chaque postulat par sa négation on obtienne un système de propositions compatibles.*

« *Pour* **démontrer** *l'irréductibilité d'un système de postulats,* il faut trouver, pour *chacun* d'eux, *une interprétation des symboles non définis, qui ne vérifie pas le postulat considéré, mais qui vérifie simultanément tous les autres.* »

Il me semble que le second texte répond complètement aux questions posées dans le premier ; je n'y ajouterai pas un seul mot, sauf la déclaration que les idées que je viens d'énoncer ne m'appartiennent pas ; on ne saurait pas même leur attribuer exactement une paternité, car presque tous les mathématiciens qui ont analysé les principes de la Géométrie en ont fait usage, quoique très souvent d'une manière confuse et inutilement restrictive (²) ; mais depuis longtemps elles ont été énoncées exacte-

---

(¹) Dans le texte de M. Hilbert et dans le mien ont respectivement la même signification *concepts élémentaires* et *symboles non définis, axiomes* et *postulats*.

(²) On est arrivé jusqu'à confondre la recherche de la preuve qu'une proposition ne dépend pas d'un système donné avec la critique de la certitude du fait énoncé par cette proposition, en oubliant que, pour prouver l'indépendance d'une proposition d'un système donné, il ne faut pas fixer préalablement la signification des symboles employés, tandis qu'on ne saurait douter de la vérité d'une proposition, avant d'avoir fixé la signification de ces symboles ; et que, par suite, il s'agit de deux questions tout à fait séparées. Plusieurs mathématiciens ont commis cette confusion, par exemple, dans leurs discussions sur le postulat des parallèles.

ment et en toute leur généralité dans la *Revue de Mathématiques* et dans le *Formulaire mathématique* (1).

*
* *

M. Hilbert poursuit :

« En Géométrie on démontre la non-contradiction des axiomes en construisant un domaine convenable de nombres tel qu'aux axiomes géométriques correspondent des relations analogues entre les nombres de ce domaine et tel, par conséquent, que toute contradiction dans les conclusions tirées des axiomes géométriques serait forcément reconnaissable dans l'arithmétique de ce domaine. De cette façon la non-contradiction des axiomes géométriques est ramenée à la démonstration de la non-contradiction des axiomes de l'Arithmétique. »

Ne m'accusez pas de vouloir trop subtiliser si je m'arrête à examiner la signification de la phrase « En Géométrie on démontre... »

Si M. Hilbert voulait dire « En Géométrie, M. un tel a démontré... » ou bien « En Géométrie, l'on pourrait démontrer... », il n'y aurait rien à objecter.

Malheureusement la phrase qui suit immédiatement dans le texte de M. Hilbert :

« Quant à la démonstration de la non-contradiction des axiomes de l'Arithmétique, elle demande à être effectuée par voie directe », nous prouve que M. Hilbert n'a pas compris que, pour démontrer l'indépendance ou la non-contradiction d'un système de propositions (2), l'on peut choisir les interprétations des symboles non définis dans un domaine convenable quelconque, pourvu seulement que la connaissance de ce domaine soit préalablement admise.

Il paraît en effet que M. Hilbert, après avoir établi une espèce de hiérarchie entre les différentes branches des mathématiques,

(1) Turin, Bocca frères.

(2) Ce sont deux questions séparées par rapport à un système donné de propositions : mais ainsi qu'il découle de ce qui précède, ce n'est qu'une seule question logique par rapport à la méthode de démonstration.

juge que le domaine de chaque branche soit en même temps le domaine d'où devait jaillir la preuve de la non-contradiction des axiomes de la branche supérieure. Par suite (comme selon M. Hilbert les deux premières branches seraient l'Arithmétique et la Géométrie) la Géométrie devrait être justifiée par l'Arithmétique, et l'Arithmétique (puisque l'on ne saurait descendre plus bas dans la hiérarchie) devrait se résigner à se justifier par elle-même.

Deux faits concourent à prouver que la conviction de M. Hilbert est erronée : maints mathématiciens ont réussi à démontrer la non-contradiction ou l'indépendance de quelques propositions de Géométrie en donnant aux symboles considérés des interprétations différentes des ordinaires, mais sans sortir du domaine de la Géométrie ; tandis que pour ma part, dans la communication dont je m'occupe, j'ai réussi à démontrer l'indépendance de plusieurs propositions d'Algèbre en donnant aux symboles considérés des interprétations qui sortent du domaine exclusif des mathématiques.

*
* *

M. Hilbert continue :

« Les axiomes de l'Arithmétique ne sont pas essentiellement autre chose que les règles ordinaires du calcul auxquelles il faut ajouter l'axiome de continuité. Il n'y a pas longtemps, j'ai énuméré ces axiomes dans une courte note ; en même temps j'y ai remplacé l'axiome de la continuité par deux autres plus simples, à savoir : l'axiome connu d'Archimède, et un nouvel axiome énonçant que les nombres forment un système d'êtres qui n'est susceptible d'aucune extension, si l'on conserve intacts tous les autres axiomes (axiome d'intégrité). »

Laissons à M. Hilbert la responsabilité du choix de son système de postulats pour l'Arithmétique. Il est certain qu'en considérant comme postulats « les règles ordinaires du calcul » et autre chose encore, les déductions doivent être bien simples : maintenant on comprend aisément pourquoi M. Hilbert renonce à se soucier de l'indépendance des postulats.

*
* *

M. Hilbert poursuit :

« Or je suis persuadé que l'on peut trouver une démonstration directe de la non-contradiction des axiomes de l'Arithmétique en appliquant à ce but les méthodes de raisonnement connues dont on se sert dans la théorie des nombres irrationnels, après les avoir remaniées en leur faisant subir des modifications convenables. »

Étrange persuasion que celle de M. Hilbert. Il peut s'épargner la peine de remanier et de modifier n'importe quelle méthode de raisonnement, car il n'aboutira à rien.

En effet : les *contradictions* ou les *dépendances* des propositions ne peuvent être démontrées que par des *raisonnements* déductifs, tandis que les *non-contradictions* ou les *indépendances* des propositions ne peuvent être démontrées que par des *constatations* (on constate que des interprétations convenablement choisies des symboles vérifient ou ne vérifient pas les propositions en question).

*
* *

La suite du texte de M. Hilbert ne mérite pas la discussion. En voici la première période :

« Pour caractériser encore à un autre égard l'importance du problème, je ferai la remarque suivante : si l'on confère à quelque notion des attributs qui se contredisent, je dirai que, au point de vue mathématique, cette notion n'existe pas. »

Et si l'on n'avait pas la prudence de se placer « au point de vue mathématique » ?

*
* *

L'*Avant-propos* de ma communication finit par une question qui n'a pas encore été posée par M. Hilbert :

« *Le système des symboles non définis doit être* **irréductible** *par rapport au système des postulats* ; en d'autres termes, il faut que des *postulats* on ne puisse *déduire* aucune proposition qui soit une *définition possible d'un des symboles non définis* au moyen des autres.

« Pour **démontrer** *l'irréductibilité d'un système de symboles non définis* par rapport à un *système de postulats*, il faut trouver *une interprétation des symboles non définis, qui vérifie simultanément tous les postulats et qui continue à les vérifier lorsqu'on change convenablement la signification d'un seul des symboles non définis*, et cela pour *chacun d'eux*. »

Après quoi, moyennant trois symboles non définis, j'énonce mon système de sept postulats (§ II), j'en démontre la comptabilité (§ III) et l'irréductibilité (§ IV); enfin je démontre l'irréductibilité du système de symboles non définis par rapport au système de postulats (§ V).

Que reste-t-il encore des questions logiques posées dans le problème n° 2 de M. Hilbert?

A. PADOA (Rome).