

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	5 (1903)
Heft:	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
Artikel:	DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE LA FORMULE $\frac{\pi^2}{\sin^2 x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$
Autor:	Lerch, M.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-6648

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 19.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Les nombres sont d'une classification très facile, ainsi que les opérations qu'on peut effectuer sur eux, et il me semble que l'étude de cette classification ne serait pas stérile pour tous ceux qui s'en occuperaient.

Ch. BERDELLÉ (Rioz, Haute-Saône).

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE LA FORMULE

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 x \pi} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+v)^2}.$$

(1) I. UN LEMME. — De la double inégalité bien connue

$$(1) \quad 1 > \frac{\sin \varphi}{\varphi} > \cos \varphi,$$

il suit que

$$0 < 1 - \frac{\sin \varphi}{\varphi} < 1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$(2) \quad 0 < 1 + \frac{\sin \varphi}{\varphi} < 2;$$

d'où en multipliant,

$$(3) \quad 0 < 1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\varphi^2} < 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

ou, après la division par la quantité

$$\sin^2 \varphi = 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$(4) \quad 0 < \frac{1}{\sin^2 \varphi} - \frac{1}{\varphi^2} < \frac{1}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

En supposant φ obtus, cette double inégalité permet de conclure que la fonction

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} - \frac{1}{\varphi^2}$$

reste finie dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

II. — Je pose $\varphi = x\pi$ pour avoir les infinis de la fonction :

$$(2) \quad f_1(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi}$$

sous forme simple, et je vais considérer la somme évidemment convergente

$$(3) \quad f_2(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu)^2}$$

qui devient infinie pour les mêmes valeurs que la fonction $f_1(x)$. On voit d'abord que l'on a

$$f_1(x+m) = f_1(x), \quad f_2(x+m) = f_2(x), \quad (m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

puis on s'assure que la différence

$$(4) \quad g(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

reste finie dans l'intervalle $\left(-\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$ et par conséquent pour tous les x .

En effet, on a

$$f_2(x) = \frac{1}{x^2} + f_3(x),$$

la fonction

$$f_3(x) = \sum_{\nu} \frac{1}{(x+\nu)^2}, \quad (\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

restant finie dans l'intervalle $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, et la quantité

$$g(x) = \left(\frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi} - \frac{1}{x^2} \right) - f_3(x)$$

devient la différence de deux fonctions qui, dans l'intervalle $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ restent finies.

Il y a donc une constante positive C telle que partout

$$(5) \quad |g(x)| \leq C,$$

la valeur spéciale de cette constante n'ayant d'ailleurs aucune importance pour nous.

III. — Si, dans la série (3), on transforme l'indice sommatoire ν en posant

$$\nu = \rho + \mu m \quad (\rho = 0, 1, 2, \dots; m = 1; \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

où m signifie un entier positif quelconque, il vient

$$f_2(x) = \sum_{\rho=0}^{m-1} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+\rho+m\mu)^2} = \sum_{\rho=0}^{m-1} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m^2 \left(\frac{x+\rho}{m} + \mu \right)^2}$$

ou bien

$$(6) \quad f_2(x) = \frac{1}{m^2} \sum_{\rho=0}^{m-1} f_2 \left(\frac{x+\rho}{m} \right).$$

Une équation fonctionnelle toute semblable subsiste pour la fonction

$$f_1(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi}$$

mais nous nous bornerons pour l'établir dans le cas particulier de $m = 2^k$, k étant un entier positif quelconque.

On a d'abord

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^2} \left[f_1 \left(\frac{x}{2} \right) + f_1 \left(\frac{x+1}{2} \right) \right] &= \frac{\pi^2}{4 \sin^2 \frac{x\pi}{2}} + \frac{\pi^2}{4 \cos^2 \frac{x\pi}{2}} = \\ &= \frac{\pi^2}{4 \sin^2 \frac{x\pi}{2} \cos^2 \frac{x\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi} = f_1(x). \end{aligned}$$

de la sorte que l'équation

$$(7) \quad f_1(x) = \frac{1}{m^2} \sum_{\rho=0}^{m-1} f_1 \left(\frac{x+\rho}{m} \right)$$

se trouve vérifiée pour $m = 2$. Admettant qu'elle subsiste pour une valeur m , nous transformerons les termes du second membre en l'employant dans le cas de $m = 2$, ce qui donne

$$f_1 \left(\frac{x+\rho}{m} \right) = \frac{1}{2^2} \left[f_1 \left(\frac{x+\rho}{2m} \right) + f_1 \left(\frac{x+m+\rho}{2m} \right) \right]$$

et il s'ensuit au lieu de (7)

$$f_1(x) = \frac{1}{(2m)^2} \sum_{\varrho=0}^{m-1} f_1\left(\frac{x+\varrho}{2m}\right) + \frac{1}{(2m)^2} \sum_{\varrho=0}^{m-1} f_1\left(\frac{x+m+\varrho}{2m}\right)$$

ou bien

$$f_1(x) = \frac{1}{(2m)^2} \sum_{\varrho=0}^{2m-1} f_1\left(\frac{x+\varrho}{2m}\right)$$

ce qui est la formule (7) écrite avec la valeur $2m$ de l'entier m .

La formule (7) ayant lieu pour $m = 2$, sera vraie, par conséquent, pour $m = 4, 8, 16$, et en général pour $m = 2^k$.

IV. — Les deux formules (6) et (7) ayant lieu pour $m = 2^k$, il s'ensuit pour la fonction

$$g(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

la formule de la même forme

$$(8) \quad g(x) = \frac{1}{m^2} \sum_{\varrho=0}^{m-1} g\left(\frac{x+\varrho}{m}\right), \quad (m = 2^k).$$

Puisque pour toute valeur de x l'inégalité (5) a lieu, cette dernière formule permet de conclure

$$|g(x)| < \frac{mC}{m^2} = \frac{C}{m}, \quad (m = 2^k),$$

et il s'ensuit en faisant croître k au delà de toute limite, que l'on a

$$|g(x)| = 0.$$

Ceci vérifie l'équation $f_1(x) = f_2(x)$, ou bien

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 x \pi} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+v)^2}$$

qu'il s'agissait d'établir. Elle fait voir, d'une manière qui me paraît élémentaire et simple, que la fonction $\sin x \pi$ est analytique, ce qui permet d'obtenir son développement suivant les puissances de x sans faire usage du théorème de Taylor-Cauchy.

M. LERCH (Fribourg, Suisse).