Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 5 (1903)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉQUIVALENCE DU MOUVEMENT D'UN PLAN INVARIABLE Σ PASSANT D'UNE POSITION DONNÉE Σ_1 A UNE AUTRE POSITION DONNÉE Σ_2.

Autor: Kraft, Ferdinand

Kapitel: I. — Relations générales entre les déplacements des points d'un système invariable arbitraire.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-6623

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 25.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ÉQUIVALENCE DU MOUVEMENT

D'UN PLAN INVARIABLE Σ PASSANT D'UNE POSITION DONNÉE Σ_1 A UNE AUTRE POSITION DONNÉE Σ_2.

I. — *Relations générales entre les déplacements des points d'un système invariable arbitraire.*

§ 1. — Les déplacements de trois ou d'un plus grand nombre de points d'une ligne droite σ qui, d'une manière quelconque, passe d'une position σ_1 à une position σ_2 ne sont pas indépendants; nous allons montrer qu'il y a une relation entre eux. Il existe entre les déplacements des points d'un système Σ à trois dimensions quand il est transporté d'une manière quelconque d'une position Σ_1 à une autre position quelconque Σ_2, des relations semblables valables de manière générale et que nous développerons d'abord.

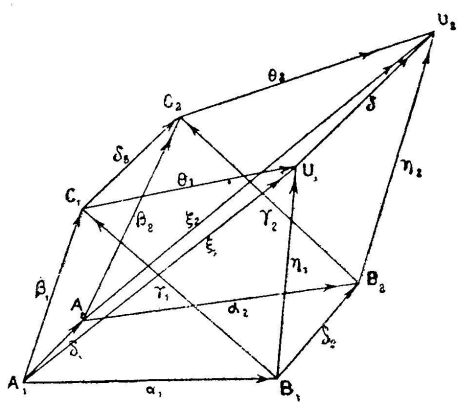

Fig. 1.

Soient A, B, C et U quatre points d'un système invariable de l'espace formant les sommets d'une pyramide arbitraire, de sorte que A, B, C, U; A_1, B_1, C_1, U_1 et A_2, B_2, C_2, U_2 sont les pyramides congruentes homologues de Σ, Σ_1 et Σ_2.

Nous posons (fig. 1).

$$\overline{A_1B_1} = \alpha_1,\ \overline{A_1C_1} = \beta_1,\ \overline{B_1C_1} = \gamma_1,\ \overline{A_1U_1} = \xi_1,\ \overline{B_1U_1} = \eta_1,\ \overline{C_1U_1} = \theta_1,$$
$$\overline{A_2B_2} = \alpha_2,\ \overline{A_2C_2} = \beta_2,\ \overline{B_2C_2} = \gamma_2,\ \overline{A_2U_2} = \xi_2,\ \overline{B_2U_2} = \eta_2,\ \overline{C_2U_2} = \theta_2,$$
$$\overline{A_1A_2} = \delta_1,\ \overline{B_1B_2} = \delta_2,\ \overline{C_1C_2} = \delta_3,\ \overline{U_1U_2} = \delta.$$

Comme Σ_1 et Σ_2 sont des systèmes congruents, le produit inté-

rieur de deux vecteurs de Σ_1 est égal au produit intérieur des vecteurs homologues de Σ_2.

Donc, on peut écrire

$$\alpha_1 | \beta_1 = \alpha_2 | \beta_2 ;$$

mais nous avons

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \delta_\alpha = \alpha_1 + \delta_2 - \delta_1,$$
$$\beta_2 = \beta_1 + \delta_\beta = \beta_1 + \delta_3 - \delta_1,$$

et aussi avec cela

$$\alpha_1 | (\beta_2 - \delta_\beta) = (\alpha_1 + \delta_\alpha) | \beta_2,$$

c'est-à-dire

$$\alpha_1 | \delta_\beta + \beta_2 | \delta_\alpha = 0,$$

ou

$$\alpha_1 | (\delta_3 - \delta_1) + \beta_2 | (\delta_2 - \delta_1) = 0,$$

ou enfin

$$\alpha_1 | \delta_3 + \beta_2 | \delta_2 = (\alpha_1 + \beta_2) | \delta_1 .$$

De même nous trouvons

$$\alpha_2 | \delta_\beta + \beta_1 | \delta_\alpha = 0,$$
$$\alpha_2 | \delta_3 + \beta_1 | \delta_2 = (\alpha_2 + \beta_1) | \delta_1 .$$

De plus on a la relation

$$\xi_1 | \gamma_1 = \xi_2 | \gamma_2 ;$$

mais nous avons

$$\gamma_1 = \gamma_2 - \delta_\gamma = \gamma_2 - \delta_3 + \delta_2, \qquad \xi_2 = \xi_1 + \delta_\xi = \xi_1 + \delta - \delta_1$$

de sorte que

$$\xi_1 | (\gamma_2 - \delta_\gamma) = (\xi_1 + \delta_\xi) | \gamma_2,$$

c'est-à-dire

$$\xi_1 | \delta_\gamma + \gamma_2 | \delta_\xi = 0,$$

ou

$$\xi_1 | (\delta_3 - \delta_2) + \gamma_2 | (\delta - \delta_1) = 0$$

ou enfin

$$\xi_1 | \delta_3 + \gamma_2 | \delta = \xi_1 | \delta_2 + \gamma_2 | \delta_1 .$$

De manière semblable s'obtiennent les relations

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 \mid \delta_\xi + \xi_2 \mid \delta_\gamma = 0,\\
&\gamma_1 \mid \delta + \xi_2 \mid \delta_3 = \gamma_1 \mid \delta_1 + \xi_2 \mid \delta_2;\\
&\beta_1 \mid \delta_\xi + \xi_2 \mid \delta_\beta = 0,\\
&\beta_1 \mid \delta + \xi_2 \mid \delta_3 = \beta_1 \mid \delta_2 + \xi_2 \mid \delta_1;\\
&\alpha_1 \mid \delta_\theta + \theta_2 \mid \delta_\alpha = 0,\\
&\alpha_1 \mid \delta + \theta_2 \mid \delta_2 = \alpha_1 \mid \delta_3 + \theta_2 \mid \delta_1.
\end{aligned}$$

En outre, pour les vecteurs du système on a les relations

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \mid \delta_\alpha = 0, \qquad (\beta_1 + \beta_2) \mid \delta_\beta = 0, \ldots$$

et aussi par suite

$$(2\alpha_1 + \delta_\alpha) \mid \delta_\alpha = 0, \qquad (2\beta_1 + \delta_\beta) \mid \delta_\beta = 0, \ldots$$

ou

$$2\alpha_1 \mid \delta_\alpha + \delta_\alpha^2 = 0, \qquad 2\beta_1 \mid \delta_\beta + \delta_\beta^2 = 0, \ldots$$

Multiplions la première de ces équations par δ_β^2, la seconde par δ_α^2, il vient

$$2\,(\alpha_1 \mid \delta_\alpha)\,\delta_\beta^2 + \delta_\alpha^2\delta_\beta^2 = 0, \qquad 2\,(\beta_1 \mid \delta_\beta)\,\delta_\alpha^2 + \delta_\alpha^2\delta_\beta^2 = 0,$$

et en combinant ces relations par addition et soustraction, on obtient les importantes relations

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1 \mid \delta_\alpha)\,\delta_\beta^2 + (\beta_1 \mid \delta_\beta)\,\delta_\alpha^2 + \delta_\alpha^2\delta_\beta^2 = 0,\\
&(\alpha_1 \mid \delta_\alpha)\,\delta_\beta^2 - (\beta_1 \mid \delta_\beta)\,\delta_\alpha^2 = 0.
\end{aligned}$$

On voit d'après cela que les déplacements de quatre points quelconques et plus du système Σ dépendent l'un de l'autre.

§ 1'. — Si les déplacements des points A, B, C et U du système Σ sont infiniment petits, il résulte des formules du § 1, si nous négligeons les grandeurs infiniment petites d'ordre supérieur devant celles d'ordre moindre,

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 \mid d\beta + \beta_1 \mid d\alpha = 0,\\
&\alpha_1 \mid d\rho_3 + \beta_1 d\rho_2 = (\alpha_1 + \beta_1) \mid d\rho_1, \qquad \alpha_1 \mid \overline{v_3} + \beta_1 \mid \overline{v_2} = (\alpha_1 + \beta_1) \mid \overline{v_1};\\
&\xi_1 \mid d\gamma + \gamma_1 \mid \delta\xi = 0,\\
&\xi_1 \mid d\rho_3 + \gamma_1 \mid d\rho = \xi_1 \mid d\rho_2 + \gamma_1 \mid d\rho_1, \qquad \xi_1 \mid \overline{v_3} + \gamma_1 \mid \overline{v} = \xi_1 \mid \overline{v_2} + \gamma_1 \mid \overline{v_1};\\
&\beta_1 \mid d\rho + \eta_1 \mid d\rho_3 = \beta_1 \mid d\rho_2 + \eta_1 \mid d\rho_1, \qquad \beta_1 \mid \overline{v} + \overline{\eta_1} \mid \overline{v_3} = \beta_1 \mid \overline{v_2} + \eta_1 \mid \overline{v_1};\\
&\alpha_1 \mid d\rho + \theta_1 \mid d\rho_2 = \alpha_1 \mid d\rho_3 + \theta_1 \mid d\rho_1, \qquad \alpha_1 \mid \overline{v} + \theta_1 \mid \overline{v_2} = \alpha_1 \mid \overline{v_3} + \theta_1 \mid \overline{v_1}.
\end{aligned}$$

Les relations ainsi développées, qui peuvent facilement se traduire en langage ordinaire, sont évidemment encore valables, si les quatre points sont situés dans un plan.

II. — *Le plan ou champ des points.*

§ 2. — Soient $A_1 = O + \rho_1$, $B_1 = O + \rho_2$, $C_1 = O + \rho_3$, trois points situés non en ligne droite dans le même plan et soit $U_1 = O + \rho$ un point arbitraire du même plan. Avec le point O comme pôle de coordonnées, l'équation du radius vector de ce plan est

$$\rho = m\rho_1 + n\rho_2 + p\rho_3, \qquad m + n + p = 1,$$

ou aussi

$$\rho = \rho_1 + n(\rho_2 - \rho_1) + p(\rho_3 - \rho_1),$$

et si nous posons

$$(\rho_2 - \rho_1) = \alpha_1, \qquad (\rho_3 - \rho_1) = \beta_1,$$

cette équation devient

$$\rho = \rho_1 + n\alpha_1 + p\beta_1.$$

Soit maintenant d'une manière quelconque le plan Σ transporté de la position Σ_1, pour laquelle nous avons écrit l'équation, à la position Σ_2.

Si le plan Σ est transporté de la position Σ_1 à la position Σ_2 ses points A, B, C et U subissent les déplacements $\overline{A_1A_2} = \delta_1$, $\overline{B_1B_2} = \delta_2$, $\overline{C_1C_2} = \delta_3$ et $\overline{U_1U_2} = \delta$, de sorte que avec $U_2 = O + \psi$ pour le plan Σ_2 il vient la relation

$$\begin{aligned}\psi = \rho + \delta &= m(\rho_1 + \delta_1) + n(\rho_2 + \delta_2) + p(\rho_3 + \delta_3)\\ &= m\rho_1 + n\rho_2 + p\rho_3 + m\delta_1 + n\delta_2 + p\delta_3,\end{aligned}$$

ou, avec $m + n + p = 1$,

$$\psi = \rho_1 + \delta_1 + n\{(\rho_2 - \rho_1) + (\delta_2 - \delta_1)\} + p\{(\rho_3 - \rho_1) + (\delta_3 - \delta_1)\},$$

ou

$$\psi = \rho_1 + n\alpha_1 + p\beta_1 + \delta_1 + n(\delta_2 - \delta_1) + p(\delta_3 - \delta_1),$$

ou

$$\psi = \rho_1 + \delta_1 + n(\alpha_1 + \delta_\alpha) + p(\beta_1 + \delta_3),$$