

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 5 (1903)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ÉQUIVALENCE DU MOUVEMENT D'UN PLAN INVARIABLE  $\Sigma$  PASSANT D'UNE POSITION DONNÉE  $\Sigma_1$  A UNE AUTRE POSITION DONNÉE  $\Sigma_2$ .  
**Autor:** Kraft, Ferdinand  
**Kapitel:** I. — Relations générales entre les déplacements des points d'un système invariable arbitraire.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-6623>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ÉQUIVALENCE DU MOUVEMENT

D'UN PLAN INVARIABLE  $\Sigma$  PASSANT D'UNE POSITION DONNÉE  $\Sigma_1$   
A UNE AUTRE POSITION DONNÉE  $\Sigma_2$ .

## I. — Relations générales entre les déplacements des points d'un système invariable arbitraire.

§ 1. — Les déplacements de trois ou d'un plus grand nombre de points d'une ligne droite  $\sigma$  qui, d'une manière quelconque, passe d'une position  $\sigma_1$  à une position  $\sigma_2$  ne sont pas indépendants; nous allons montrer qu'il y a une relation entre eux. Il existe entre les déplacements des points d'un système  $\Sigma$  à trois dimensions quand il est transporté d'une manière quelconque d'une position  $\Sigma_1$  à une autre position quelconque  $\Sigma_2$ , des rela-

tions semblables valables de manière générale et que nous développerons d'abord.

Soient A, B, C et U quatre points d'un système invariable de l'espace formant les sommets d'une pyramide arbitraire, de sorte que A, B, C, U;  $A_1, B_1, C_1, U_1$  et  $A_2, B_2, C_2, U_2$  sont les pyramides congruentes homologues de  $\Sigma, \Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ .

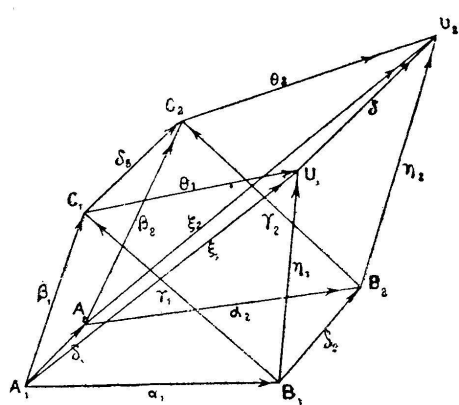


Fig. 1.

Nous posons (fig. 1).

$$\begin{aligned} \overline{A_1 B_1} &= \alpha_1, \overline{A_1 C_1} = \beta_1, \overline{B_1 C_1} = \gamma_1, \overline{A_1 U_1} = \xi_1, \overline{B_1 U_1} = \eta_1, \overline{C_1 U_1} = \theta_1, \\ \overline{A_2 B_2} &= \alpha_2, \overline{A_2 C_2} = \beta_2, \overline{B_2 C_2} = \gamma_2, \overline{A_2 U_2} = \xi_2, \overline{B_2 U_2} = \eta_2, \overline{C_2 U_2} = \theta_2, \\ \overline{A_1 A_2} &= \delta_1, \overline{B_1 B_2} = \delta_2, \overline{C_1 C_2} = \delta_3, \overline{U_1 U_2} = \delta. \end{aligned}$$

Comme  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont des systèmes congruents, le produit inté-

rieur de deux vecteurs de  $\Sigma_1$  est égal au produit intérieur des vecteurs homologues de  $\Sigma_2$ .

Donc, on peut écrire

$$\alpha_1 | \beta_1 = \alpha_2 | \beta_2;$$

mais nous avons

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \alpha_1 + \delta_\alpha = \alpha_1 + \delta_2 - \delta_1, \\ \beta_2 &= \beta_1 + \delta_\beta = \beta_1 + \delta_3 - \delta_1,\end{aligned}$$

et aussi avec cela

$$\alpha_1 | (\beta_2 - \delta_\beta) = (\alpha_1 + \delta_\alpha) | \beta_2,$$

c'est-à-dire

$$\alpha_1 | \delta_\beta + \beta_2 | \delta_\alpha = 0,$$

ou

$$\alpha_1 | (\delta_\beta - \delta_1) + \beta_2 | (\delta_2 - \delta_1) = 0,$$

ou enfin

$$\alpha_1 | \delta_\beta + \beta_2 | \delta_2 = (\alpha_1 + \beta_2) | \delta_1.$$

De même nous trouvons

$$\begin{aligned}\alpha_2 | \delta_\beta + \beta_1 | \delta_\alpha &= 0, \\ \alpha_2 | \delta_\beta + \beta_1 | \delta_2 &= (\alpha_2 + \beta_1) | \delta_1.\end{aligned}$$

De plus on a la relation

$$\xi_1 | \gamma_1 = \xi_2 | \gamma_2;$$

mais nous avons

$$\gamma_1 = \gamma_2 - \delta_\gamma = \gamma_2 - \delta_3 + \delta_2, \quad \xi_2 = \xi_1 + \delta_\xi = \xi_1 + \delta - \delta_1$$

de sorte que

$$\xi_1 | (\gamma_2 - \delta_\gamma) = (\xi_1 + \delta_\xi) | \gamma_2,$$

c'est-à-dire

$$\xi_1 | \delta_\gamma + \gamma_2 | \delta_\xi = 0,$$

ou

$$\xi_1 | (\delta_3 - \delta_2) + \gamma_2 | (\delta - \delta_1) = 0$$

ou enfin

$$\xi_1 | \delta_3 + \gamma_2 | \delta = \xi_1 | \delta_2 + \gamma_2 | \delta_1.$$

De manière semblable s'obtiennent les relations

$$\begin{aligned}\gamma_1 | \partial_{\xi} + \xi_2 | \partial_{\gamma} &= 0, \\ \gamma_1 | \partial + \xi_2 | \partial_3 &= \gamma_1 | \partial_1 + \xi_2 | \partial_2; \\ \beta_1 | \partial_{\xi} + \xi_2 | \partial_{\beta} &= 0, \\ \beta_1 | \partial + \xi_2 | \partial_3 &= \beta_1 | \partial_2 + \xi_2 | \partial_1; \\ \alpha_1 | \partial_{\theta} + \theta_2 | \partial_{\alpha} &= 0, \\ \alpha_1 | \partial + \theta_2 | \partial_2 &= \alpha_1 | \partial_3 + \theta_2 | \partial_1.\end{aligned}$$

En outre, pour les vecteurs du système on a les relations

$$(\alpha_1 + \alpha_2) | \partial_{\alpha} = 0, \quad (\beta_1 + \beta_2) | \partial_{\beta} = 0, \dots$$

et aussi par suite

$$(2\alpha_1 + \partial_{\alpha}) | \partial_{\alpha} = 0, \quad (2\beta_1 + \partial_{\beta}) | \partial_{\beta} = 0, \dots$$

ou

$$2\alpha_1 | \partial_{\alpha} + \partial_{\alpha}^2 = 0, \quad 2\beta_1 | \partial_{\beta} + \partial_{\beta}^2 = 0, \dots$$

Multiplions la première de ces équations par  $\partial_{\beta}^2$ , la seconde par  $\partial_{\alpha}^2$ , il vient

$$2(\alpha_1 | \partial_{\alpha}) \partial_{\beta}^2 + \partial_{\alpha}^2 \partial_{\beta}^2 = 0, \quad 2(\beta_1 | \partial_{\beta}) \partial_{\alpha}^2 + \partial_{\alpha}^2 \partial_{\beta}^2 = 0,$$

et en combinant ces relations par addition et soustraction, on obtient les importantes relations

$$\begin{aligned}(\alpha_1 | \partial_{\alpha}) \partial_{\beta}^2 + (\beta_1 | \partial_{\beta}) \partial_{\alpha}^2 + \partial_{\alpha}^2 \partial_{\beta}^2 &= 0, \\ (\alpha_1 | \partial_{\alpha}) \partial_{\beta}^2 - (\beta_1 | \partial_{\beta}) \partial_{\alpha}^2 &= 0.\end{aligned}$$

On voit d'après cela que les déplacements de quatre points quelconques et plus du système  $\Sigma$  dépendent l'un de l'autre.

§ 1'. — Si les déplacements des points A, B, C et U du système  $\Sigma$  sont infiniment petits, il résulte des formules du § 1, si nous négligeons les grandeurs infiniment petites d'ordre supérieur devant celles d'ordre moindre,

$$\begin{aligned}\alpha_1 | d\beta + \beta_1 | dx &= 0, \\ \alpha_1 | d\rho_3 + \beta_1 d\rho_2 &= (\alpha_1 + \beta_1) | d\rho_1, & \alpha_1 | \bar{v}_3 + \beta_1 | \bar{v}_2 &= (\alpha_1 + \beta_1) | \bar{v}_1; \\ \xi_1 | d\gamma + \gamma_1 | \partial\xi &= 0, \\ \xi_1 | d\rho_3 + \gamma_1 | d\rho &= \xi_1 | d\rho_2 + \gamma_1 | d\rho_1, & \xi_1 | \bar{v}_3 + \gamma_1 | \bar{v} &= \xi_1 | \bar{v}_2 + \gamma_1 | \bar{v}_1; \\ \beta_1 | d\rho + \tau_1 | d\rho_3 &= \beta_1 | d\rho_2 + \tau_1 | d\rho_1, & \beta_1 | \bar{v} + \tau_1 | \bar{v}_3 &= \beta_1 | \bar{v}_2 + \tau_1 | \bar{v}_1; \\ \alpha_1 | d\rho + \theta_1 | d\rho_2 &= \alpha_1 | d\rho_3 + \theta_1 | d\rho_1, & \alpha_1 | \bar{v} + \theta_1 | \bar{v}_2 &= \alpha_1 | \bar{v}_3 + \theta_1 | \bar{v}_1.\end{aligned}$$

Les relations ainsi développées, qui peuvent facilement se traduire en langage ordinaire, sont évidemment encore valables, si les quatre points sont situés dans un plan.

## II. — *Le plan ou champ des points.*

§ 2. — Soient  $A_1 = O + \rho_1$ ,  $B_1 = O + \rho_2$ ,  $C_1 = O + \rho_3$ , trois points situés non en ligne droite dans le même plan et soit  $U_1 = O + \rho$  un point arbitraire du même plan. Avec le point  $O$  comme pôle de coordonnées, l'équation du radius vector de ce plan est

$$\rho = m\rho_1 + n\rho_2 + p\rho_3, \quad m + n + p = 1,$$

ou aussi

$$\rho = \rho_1 + n(\rho_2 - \rho_1) + p(\rho_3 - \rho_1),$$

et si nous posons

$$(\rho_2 - \rho_1) = \alpha_1, \quad (\rho_3 - \rho_1) = \beta_1,$$

cette équation devient

$$\rho = \rho_1 + n\alpha_1 + p\beta_1.$$

Soit maintenant d'une manière quelconque le plan  $\Sigma$  transporté de la position  $\Sigma_1$ , pour laquelle nous avons écrit l'équation, à la position  $\Sigma_2$ .

Si le plan  $\Sigma$  est transporté de la position  $\Sigma_1$  à la position  $\Sigma_2$  ses points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $U$  subissent les déplacements  $\overline{A_1A_2} = \delta_1$ ,  $\overline{B_1B_2} = \delta_2$ ,  $\overline{C_1C_2} = \delta_3$  et  $\overline{U_1U_2} = \delta$ , de sorte que avec  $U_2 = O + \psi$  pour le plan  $\Sigma_2$  il vient la relation

$$\begin{aligned} \psi &= \rho + \delta = m(\rho_1 + \delta_1) + n(\rho_2 + \delta_2) + p(\rho_3 + \delta_3) \\ &= m\rho_1 + n\rho_2 + p\rho_3 + m\delta_1 + n\delta_2 + p\delta_3, \end{aligned}$$

ou, avec  $m + n + p = 1$ ,

$$\psi = \rho_1 + \delta_1 + n \{ (\rho_2 - \rho_1) + (\delta_2 - \delta_1) \} + p \{ (\rho_3 - \rho_1) + (\delta_3 - \delta_1) \},$$

ou

$$\psi = \rho_1 + n\alpha_1 + p\beta_1 + \delta_1 + n(\delta_2 - \delta_1) + p(\delta_3 - \delta_1),$$

ou

$$\psi = \rho_1 + \delta_1 + n(\alpha_1 + \delta_\alpha) + p(\beta_1 + \delta_\beta),$$