Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 5 (1903)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: REMARQUES SUR LES VARIATIONS D'UN POLYNOME

Autor: Zervos, P.

Kapitel: III. Recherche approximative d'une racine positive d'un polynôme AVEC LE PREMIER TERME POSITIF ET LES AUTRES NÉGATIFS

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-6641

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 25.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

2. — Tout polynôme entier multiplié par

$$(x+\alpha)^2+b^2$$

où

$$\alpha > |b|$$

et

$$\alpha \leqq \left| \frac{a_\mu}{a_{\mu-1}} \right|$$

peut bien perdre, mais jamais gagner des variations.

La démonstration est analogue à la précédente ; il suffit d'ajouter ici l'observation que l'avant-dernier coefficient du produit

$$2\alpha\, a_\mu + (\alpha^2+b^2)\, a_{\mu-1}$$

aura le même signe que le dernier, d'après nos conditions.

III. Recherche approximative d'une racine positive d'un polynôme avec le premier terme positif et les autres négatifs

1. — On sait qu'une équation avec une seule variation a une racine positive α et qu'un polynôme multiplié par $x-\alpha$ acquiert au moins une nouvelle variation, il s'en suit que si nous divisons le premier membre de l'équation donnée par $x-\alpha$, nous aurons un polynôme avec des termes tous de même signe.

Soit maintenant un tel polynôme :

$$a_0 x^\mu - a_1 x^{\mu-1} - a_2 x^{\mu-2} - a_3 x^{\mu-3} \ldots\ldots$$

si nous le divisons par $x-a$, nous aurons tous les coefficients du quotient positifs

$$a_0, \quad a_0\alpha - a_1 > 0, \quad a_0\alpha^2 - a_1\alpha - a_2 > 0,$$

De l'inégalité

$$a_0\alpha - a_1 > 0$$

l'on déduit que

$$\alpha > \frac{a_1}{a_0},$$

de même de l'inégalité

$$a_0\alpha^2 - a_1\alpha - a_2 > 0$$

l'on déduit que

$$\alpha^2 - \frac{a_1}{a_0}\alpha - \frac{a_2}{a_0} > 0$$

mais, pour cela, il faut que α soit un nombre plus grand que la racine positive de l'équation

$$x^2 - \frac{a_1}{a_0} . x - \frac{a_2}{a_0} = 0$$

(parce que $\alpha > 0$) d'où

$$\alpha > \frac{a_1}{2a_0} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2 + \frac{a_2}{a_0}}$$

qui est plus grande que $\frac{a_1}{a_0}$.

IV. Limites de racines

On connaît les relations entre les racines et les coefficients, c'est-à-dire

$$\begin{gathered}\alpha + \beta + \gamma + \ldots\ldots = -a_1 \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \ldots\ldots = +a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha\beta\gamma\ldots\ldots\gamma = (-1)^{\mu} a_{\mu}\end{gathered}$$

Nous pouvons en déduire des règles pour trouver des limites des racines ; par exemple :

1. — Si dans un polynôme du degré μ avec des racines toutes réelles, nous avons

$$| a_{\mu-1} | > a_{\mu}$$

il y aura nécessairement une racine en valeur absolue moindre que μ.

Démonstration. — La somme des produits des racines $\mu - 1$ à $\mu - 1$ donne en valeur absolue le terme $| a_{\mu-1} |$. La valeur absolue du produit des racines est $| a_{\mu} |$. Des produits $\mu - 1$ à $\mu - 1$, le plus grand en valeur absolue est celui qui n'a pas la racine la plus petite ; et si nous multiplions ce produit par μ, nous aurons un nombre plus grand que $| a_{\mu-1} |$ et par conséquent que $| a_{\mu} |$; tandis que si le même produit est multiplié par la racine a plus petite, nous aurons le terme $| a_{\mu} |$.