

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 5 (1903)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** REMARQUES SUR LES VARIATIONS D'UN POLYNOME  
**Autor:** Zervos, P.  
**Kapitel:** II. Changement des variations d'un polynôme en multipliant par  $\{(x+a)^2+b^2\}$ .  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-6641>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 07.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

II. CHANGEMENT DES VARIATIONS D'UN POLYNÔME EN MULTIPLIANT  
PAR  $(x + a)^2 + b^2$ .

Considérons l'opération :

$a_0x^{\mu} + a_1x^{\mu-1} + a_2x^{\mu-2} + \dots + a_{\mu-2}x^2 + a_{\mu-1}x + a_{\mu}$  (polynôme complet).  
 $x^2 + 2ax + (a^2 + b^2)$

$$\begin{array}{c} a_0 | x^{\mu+2} + a_1 | x^{\mu+1} + a_2 | x^{\mu} + a_3 | x^{\mu-1} \dots + a_{\mu-2} \\ \quad + 2ax_0 | \quad + 2xa_1 | \quad + 2xa_2 | \quad + 2xa_{\mu-3} | \\ \quad + (a^2 + b^2)x_0 | \quad + (a^2 + b^2)a_1 | \quad + (a^2 + b^2)a_{\mu-4} | \\ x^4 + a_{\mu-1} | x^3 + a_{\mu} | x^2 + a_{\mu-1} | x \\ \quad + 2xa_{\mu-2} | \quad + 2xa_{\mu-1} | \quad + 2xa_{\mu} | \quad + 2xa_{\mu-1} | \\ \quad + (a^2 + b^2)a_{\mu-3} | \quad + (a^2 + b^2)a_{\mu-2} | \quad + (a^2 + b^2)a_{\mu-1} | \quad + (a^2 + b^2)a_{\mu} | \end{array}$$

1. — Soit  $\alpha > |b|$  et  $a_{\mu}, a_{\mu-1} > 0$  alors le nouveau polynôme présentera un nombre de variations moindre ou, au plus, égal à celui du polynôme donné.

*Démonstration.* — Exprimons par

$a_0, a_1, \dots, a_{\rho}$  le premier groupe des termes positifs.

$a_{\rho+1}, a_{\rho+2}, \dots, a_{\tau}$  le deuxième groupe des termes négatifs.

$a_{\tau+1}, a_{\tau+2}, \dots, a_{\sigma}$  le troisième groupe des termes positifs.

e. c. t.

Nous observons que, aux  $\rho + 1$  premiers termes positifs du multiplicande correspondent  $\rho + 1$  premiers termes positifs du produit.

Du  $a_{\rho}$  jusqu'à  $a_{\tau}$  il se présente une variation au multiplicande ; je dis qu'il se présentera une, au plus, dans les termes correspondants du produit ; parce que dans la série

$$a_{\rho+1} + 2\alpha a_{\rho} + (a^2 + b^2) a_{\rho-1}, a_{\rho+2} + 2\alpha a_{\rho+1} + (a^2 + b^2) a_{\rho}, \\ a_{\rho+3} + 2\alpha a_{\rho+2} + (a^2 + b^2) a_{\rho+1}, \dots, a_{\tau} + 2\alpha a_{\tau-1} + (a^2 + b^2) a_{\tau-2}$$

tous les termes à partir du troisième jusqu'au dernier sont négatifs parce qu'ils se composent de termes négatifs. Les coefficients qui se composent de négatifs et positifs sont le premier et le second coefficient de la série précédente.

Or, quand le premier est négatif, nous avons

$$|a_{\rho+1}| > 2\alpha a_{\rho}$$

d'où aussi

$$2 \cdot x \cdot |a_{\xi+1}| > (x^2 + b^2) a_\xi,$$

parce que

$$x > |b|;$$

par conséquent

$$|a_{\xi+2} + 2xa_{\xi+1}| > (x^2 + b^2) a_\xi,$$

c'est-à-dire que le second est aussi négatif; quand, au contraire, le premier est positif, alors quel que soit le second nous aurons une variation. Nous voyons de même que, comme les termes du multiplicande  $a_\xi, a_{\xi+1}, \dots, a_\mu$  présentent une variation, les termes correspondants du produit présentent aussi, au plus, une variation, etc. L'on déduit ainsi la règle suivante : Du premier terme du produit jusqu'à celui qui précède l'avant-dernier, nous avons, au plus, autant de variations que le multiplicande.

Il reste encore à examiner dans le produit les trois derniers termes, c'est-à-dire

$$a_\mu + 2xa_{\mu-1} + (x^2 + b^2) a_{\mu-2}, \quad 2xa_\mu + (x^2 + b^2) a_{\mu-1}, \quad (x^2 + b^2) a_\mu.$$

D'après ce que nous avons démontré, le produit présente, jusqu'au terme dont le rang est  $\mu + 1$  autant de variations que le multiplicande, ou moins. Or, si d'abord il en présente autant que le multiplicande, le terme qui a le rang  $\mu + 1$  aura le même signe avec celui qui a le rang  $\mu + 1$  du multiplicande, autrement le produit présentera, jusque-là, au moins une variation de moins, parce qu'il ne peut en présenter davantage, c'est-à-dire le coefficient  $a_\mu + 2x \cdot a_{\mu-1} + (x^2 + b^2) a_{\mu-2}$  aura le même signe avec  $a_\mu$  par conséquent aussi avec  $(x^2 + b^2) a_\mu$  et aussi avec  $2x \cdot a_\mu + (x^2 + b^2) a_{\mu-1}$  car, nous avons supposé que

$$a_\mu a_{\mu-1} > 0.$$

donc les trois derniers termes du produit ne présentent aucune variation; si maintenant le produit présente jusqu'au terme qui a le rang  $(\mu + 1)$  moins de variations que le multiplicande, alors les variations du produit seront, au plus, aussi nombreuses que celles du multiplicande, car les trois derniers coefficients du produit peuvent présenter, au plus, une variation, puisque

$$a_{\mu-1} a_\mu > 0.$$

2. — Tout polynôme entier multiplié par

$$(x + \alpha)^2 + b^2$$

où

$$\alpha > |b|$$

et

$$\alpha \leq \left| \frac{a_\mu}{a_{\mu-1}} \right|$$

peut bien perdre, mais jamais gagner des variations.

La démonstration est analogue à la précédente ; il suffit d'ajouter ici l'observation que l'avant-dernier coefficient du produit

$$2\alpha a_\mu + (\alpha^2 + b^2) a_{\mu-1}$$

aura le même signe que le dernier, d'après nos conditions.

### III. RECHERCHE APPROXIMATIVE D'UNE RACINE POSITIVE D'UN POLYNOME AVEC LE PREMIER TERME POSITIF ET LES AUTRES NÉGATIFS

1. — On sait qu'une équation avec une seule variation a une racine positive  $\alpha$  et qu'un polynôme multiplié par  $x - \alpha$  acquiert au moins une nouvelle variation, il s'en suit que si nous divisons le premier membre de l'équation donnée par  $x - \alpha$ , nous aurons un polynôme avec des termes tous de même signe.

Soit maintenant un tel polynôme :

$$a_0 x^\mu - a_1 x^{\mu-1} - a_2 x^{\mu-2} - a_3 x^{\mu-3} \dots$$

si nous le divisons par  $x - \alpha$ , nous aurons tous les coefficients du quotient positifs

$$a_0, \quad a_0 \alpha - a_1 > 0, \quad a_0 \alpha^2 - a_1 \alpha - a_2 > 0,$$

De l'inégalité

$$a_0 \alpha - a_1 > 0$$

l'on déduit que

$$\alpha > \frac{a_1}{a_0},$$

de même de l'inégalité

$$a_0 \alpha^2 - a_1 \alpha - a_2 > 0$$