Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 5 (1903)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA FORMULE DE STOKES

Autor: Silva, Otto A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-6639

Le conjugué d' du point d_x donne alors la distance

$$p' = \frac{m'n'(m-n)}{mn' - m'n} = \lambda - t'.$$

Cette valeur peut du reste être déduite directement du cas précédent.

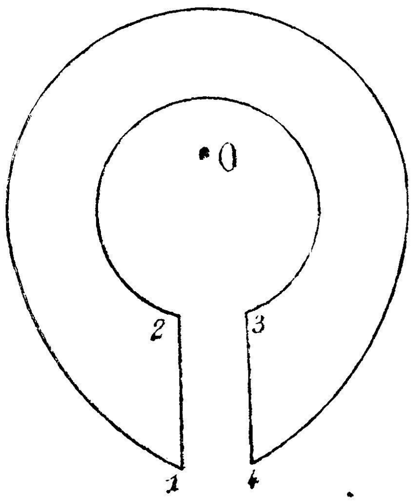
L. Crelier (Bienne, Suisse).

LA FORMULE DE STOKES

Rappelons que le théorème de Stokes se résume dans l'identité

$$\int_0 (X dx + Y dy + Z dz)$$
$$= \int_S \left\{ \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) l + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) m + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) n \right\} d\omega$$

dans laquelle le premier membre est une intégrale curviligne et le deuxième une intégrale de surface limitée par le contour de la première ; X, Y, Z sont des fonctions de x, y, z, finies et continues sur la surface, admettant des dérivées finies et continues aux mêmes endroits ; l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale à l'élément $d\omega$ de la surface.



Nous poserons

$$x = f(u, v),$$
$$y = g(u, v),$$
$$z = h(u, v),$$

de telle sorte que ce soient

$$x = f(v_1, u), \text{ etc.}$$
$$x = f(v_2, u), \text{ etc.}$$

les équations des courbes 1-2 et 3-4, et

$$x = f(v, u_1), \text{ etc.}$$
$$x = f(v, u_2), \text{ etc.}$$

celles des courbes 2-3 et 1-4.

Nous aurons évidemment

$$\int_0 (X dx + Y dy + Z dz) = {}^{(v_1)}\int_{u_1}^{u_2} \left(X \frac{\partial x}{\partial u} + Y \frac{\partial y}{\partial u} + Z \frac{\partial z}{\partial u}\right) du$$

$$- {}^{(v_2)}\int_{u_1}^{u_2} \left(X \frac{\partial x}{\partial u} + Y \frac{\partial y}{\partial u} + Z \frac{\partial z}{\partial u}\right) du + {}^{(u_1)}\int_{v}^{v_1} \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v}\right) dv$$

$$- {}^{(u_2)}\int_{v_2}^{v_1} \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v}\right) dv.$$

Mais d'un autre côté, on a

$$\frac{\partial}{\partial v}\int_{u_1}^{u_2} \left(X \frac{\partial x}{\partial u} + \ldots\right) du\, dv$$

$$= \int_{u_1}^{u_2} \sum \left\{\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u}\right\} du\, dv + \int_{u_1}^{u_2} \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\, du\, dv.$$

L'intégration par parties donne d'ailleurs

$$\int_{u_1}^{u_2} \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\, du\, dv = \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v}\right)_{u_2} dv$$

$$- \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v}\right)_{u_1} dv$$

$$- \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v}\, du\, dv$$

$$- \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial y}{\partial v}\, du\, dv$$

$$- \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial z}{\partial v}\, du\, dv.$$

En faisant les substitutions et les réductions on aura

$$\frac{\partial}{\partial v}\int_{u_1}^{u_2} \left(X \frac{\partial x}{\partial u} + \ldots\right) du\, dv = \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v}\right)_{u_2} dv$$

$$- \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v}\right)_{u_1} dv$$

$$+ \int_{1}^{u_2} \left\{\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\frac{D(x_1 y)}{D(u_1 v)} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\frac{D(y_1 z)}{D(u_1 v)} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\frac{D(z_1 x)}{D(u_1 v)}\right\} du\, dv.$$

En intégrant cette expression entre les limites v_1 et v_2 on a

$$\begin{aligned}&{}^{(v_1)}\int_{u_1}^{u_2}\left(X\frac{\partial x}{\partial u}+\ldots\right)du-{}^{(v_2)}\int_{u_1}^{u_2}\left(X\frac{\partial x}{\partial u}+\ldots\right)du\\&+{}^{(u_1)}\int_{v_2}^{v_1}\left(X\frac{\partial x}{\partial v}+\ldots\right)dv-{}^{(u_2)}\int_{v_2}^{v_1}\left(X\frac{\partial x}{\partial v}+\ldots\right)dv\\&=\int_{v_2}^{v_1}\int_{u_1}^{u_2}\left\{\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\frac{D(x,y)}{D(u,v)}+\ldots\right\}du\,dv.\end{aligned}$$

Le premier membre est l'intégrale le long du contour ; le deuxième celle relative à la surface y comprise.

En désignant par l, m, n, les cosinus directeurs de la normale, on a

$$\begin{aligned}&\int_0 (X dx+Y dy+Z dz)\\&=\int_S\left\{\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)l+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)m+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)n\right\}dw.\end{aligned}$$

Il faut rapprocher maintenant les deux courbes 1-2 et 3-4, et réduire le petit contour 2-3 à un point.

OTTO A. SILVA (Rio de Janeiro).