

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 5 (1903)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA FORMULE DE STOKES
Autor: Silva, Otto A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-6639>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Le conjugué d' du point d_x donne alors la distance

$$p' = \frac{m'u'(m-n)}{mn' - m'u} = \lambda - t'.$$

Cette valeur peut du reste être déduite directement du cas précédent.

L. CRELIER (Bienne, Suisse).

LA FORMULE DE STOKES

Rappelons que le théorème de Stokes se résume dans l'identité

$$\int_0 (Xdx + Ydy + Zdz) = \int_S \left(\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) l + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) m + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) n \right) dw$$

dans laquelle le premier membre est une intégrale curviligne et le deuxième une intégrale de surface limitée par le contour de la première; X, Y, Z sont des fonctions de x, y, z , finies et continues sur la surface, admettant des dérivées finies et continues aux mêmes endroits; l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale à l'élément dw de la surface.

Nous poserons

$$\begin{aligned} x &= f(u, v), \\ y &= g(u, v), \\ z &= h(u, v), \end{aligned}$$

de telle sorte que ce soient

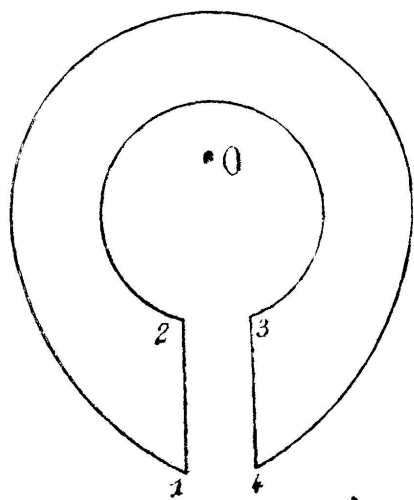
$$\begin{aligned} x &= f(v_1, u), \text{ etc.} \\ x &= f(v_2, u), \text{ etc.} \end{aligned}$$

les équations des courbes 1-2 et 3-4,

et

$$\begin{aligned} x &= f(v, u_1), \text{ etc.} \\ x &= f(v, u_2), \text{ etc.} \end{aligned}$$

celles des courbes 2-3 et 1-4.



Nous aurons évidemment

$$\int_0^1 (Xdx + Ydy + Zdz) = \int_{u_1}^{u_2} \left(X \frac{\partial x}{\partial u} + Y \frac{\partial y}{\partial u} + Z \frac{\partial z}{\partial u} \right) du$$

$$- \int_{v_1}^{v_2} \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v} \right) dv + \int_{v_1}^{v_2} \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v} \right) dv$$

$$- \int_{v_2}^{v_1} \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v} \right) dv.$$

Mais d'un autre côté, on a

$$\frac{\partial}{\partial v} \int_{u_1}^{u_2} \left(X \frac{\partial x}{\partial u} + \dots \right) du dv$$

$$= \int_{u_1}^{u_2} \sum \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} dudv + \int_{u_1}^{u_2} \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} dudv.$$

L'intégration par parties donne d'ailleurs

$$\int_{u_1}^{u_2} \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} dudv = \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v} \right)_{u_2} dv$$

$$- \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v} \right)_{u_1} dv$$

$$- \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} dudv$$

$$- \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial y}{\partial v} dudv$$

$$- \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial z}{\partial v} dudv.$$

En faisant les substitutions et les réductions on aura

$$\frac{\partial}{\partial v} \int_{u_1}^{u_2} \left(X \frac{\partial x}{\partial u} + \dots \right) dudv = \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v} \right)_{u_2} dv$$

$$- \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v} \right)_{u_1} dv$$

$$+ \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \frac{D(x,y)}{D(u,v)} + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \frac{D(y,z)}{D(u,v)} +$$

$$+ \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \frac{D(z,x)}{D(u,v)} \} dudv.$$

En intégrant cette expression entre les limites v_1 et v_2 on a

$$\begin{aligned} & \int_{u_1}^{(v_1)} \int_{u_1}^{u_2} \left(X \frac{\partial x}{\partial u} + \dots \right) du - \int_{u_1}^{(v_2)} \int_{u_1}^{u_2} \left(X \frac{\partial x}{\partial u} + \dots \right) du \\ & + \int_{v_2}^{(u_1)} \int_{v_2}^{v_1} \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + \dots \right) dv - \int_{v_2}^{(u_2)} \int_{v_2}^{v_1} \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + \dots \right) dv \\ & = \int_{v_2}^{v_1} \int_{u_1}^{u_2} \left\{ \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \frac{D(x,y)}{D(u,v)} + \dots \right\} dudv. \end{aligned}$$

Le premier membre est l'intégrale le long du contour; le deuxième celle relative à la surface y comprise.

En désignant par l, m, n , les cosinus directeurs de la normale, on a

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (Xdx + Ydy + Zdz) \\ & = \int_s \left\{ \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) l + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) m + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) n \right\} ds. \end{aligned}$$

Il faut rapprocher maintenant les deux courbes 1-2 et 3-4, et réduire le petit contour 2-3 à un point.

OTTO A. SILVA (Rio de Janeiro).