

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 5 (1903)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES DIVISIONS HOLOGRAPHIQUES
Autor: Crelier, L.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-6638>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 07.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LES DIVISIONS HOMOGRAPHIQUES

INTRODUCTION. — Quand on développe la théorie des divisions homographiques au moyen de l'équation algébrique fondamentale

$$xx' - \lambda x - \mu x' + \nu = 0$$

on est amené à considérer deux origines O et O' pour compter les segments x , x' .

En disant que l'équation doit être satisfaite quelles que soient les origines, on admet le fait comme évident *à priori*. Cependant nous croyons bon, dans l'intérêt des débutants de la géométrie synthétique, de donner une forme plus concrète et plus précise à ce principe, en l'énonçant comme un théorème dont la démonstration simple conduit d'une manière palpable aux propriétés connues des coefficients λ , μ et ν .

Tel est le but que nous nous proposons dans les lignes qui suivent.

DÉFINITION. — On appelle divisions homographiques des suites de points telles qu'à chaque point de l'une correspond un point et un seul de l'autre.

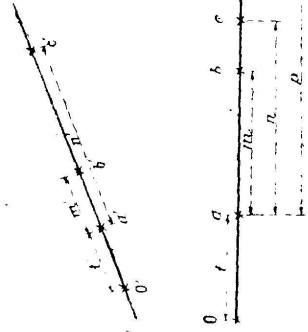
ÉQUATION. — Il existe donc entre les segments x et x' déterminés sur deux bases l et l' , par deux points homologues et comptés depuis deux origines données, une équation du premier degré de la forme :

$$xx' - \lambda x - \mu x' + \nu = 0.$$

Les coefficients λ , μ , ν sont déterminés par trois paires de points homologues fondamentaux.

THÉORÈME : *Étant donné 3 paires de points homologues fondamentaux, la position des éléments d'une quatrième paire sur les bases est indépendante des origines.*

DÉMONSTRATION. — Soit O et O' les origines, a, a' ; b, b' et c, c' les 3 paires de points homologues fondamentaux. Désignons les segments comme suit :



$$\begin{array}{lll} Oa = t & ab = m & ac = n \\ O'a' = t' & a'b' = m' & a'c' = n'. \end{array}$$

L'équation de définition s'appelle :

$$xx' - \lambda x' - \mu x + \nu = 0.$$

Calculons d'abord les coefficients λ , μ et ν en formant les 3 équations correspondant aux points donnés ; nous avons :

$$\begin{aligned} tt' & - \lambda t - \mu t' + \nu = 0 \\ (t+m)(t'+m') & - \lambda(t+m) - \mu(t'+m') + \nu = 0, \\ (t+n)(t'+n') & - \lambda(t+n) - \mu(t'+n') + \nu = 0. \end{aligned}$$

Les solutions λ , μ et ν seront

$$\lambda = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad \mu = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad \nu = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Formons ensuite ces déterminants

$$\Delta = \begin{vmatrix} -t & -t' & +1 \\ -(t+m) & -(t'+m') & +1 \\ -(t+n) & -(t'+n') & +1 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -tt' & -t' & +1 \\ -(t+m)(t'+m') & -(t'+m') & +1 \\ -(t+n)(t'+n') & -(t'+n') & +1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -t & -tt' & +1 \\ -(t+m) & -(t+m)(t'+m') & +1 \\ -(t+n) & -(t+n)(t'+n') & +1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -t & -t' & -tt' \\ -(t+m) & -(t'+m') & -(t+m)(t'+m') \\ -(t+n) & -(t'+n') & -(t+n)(t'+n') \end{vmatrix}$$

Développons et simplifions :

$$\begin{aligned}\Delta &= m'n - mn', \\ \Delta_1 &= t'(mn' - m'n) + mn'(m - n), \\ \Delta_2 &= t(mn' - m'n) + mn(n' - m'), \\ \Delta_3 &= tt'(mn' - m'n) + tm'n'(m - n) + t'mn(n' - m').\end{aligned}$$

On peut encore écrire évidemment :

$$\begin{cases} \Delta_1 = \Delta t' + m'n'(m - n), \\ \Delta_2 = \Delta t + mn(n' - m'), \\ \Delta_3 = \Delta_1 t + \Delta_2 t' - \Delta tt'. \end{cases}$$

Prenons maintenant un 4^e point d sur l , donnant

$$x = t + p \text{ avec } p = ad.$$

Son homologue d' sur l' donne

$$x' = t' + p' \text{ avec } p' = a'd'.$$

La valeur x' se déduira de celle de x d'après l'équation fondamentale :

$$xx' - \lambda x - \mu x' + \nu = 0.$$

On aura :

$$x' = \frac{\lambda x - \nu}{n - \mu}.$$

Introduisons les valeurs des déterminants :

$$x' = \frac{\frac{\Delta_1}{\Delta} x - \frac{\Delta_3}{\Delta}}{x - \frac{\Delta_2}{\Delta}} = \frac{\Delta_1 x - \Delta_3}{\Delta x - \Delta_2}.$$

Avec les segments p , t , p' et t' , on a :

$$p' + t' = \frac{\Delta_1(t + p) - \Delta_3}{\Delta(t + p) - \Delta_2}.$$

Développons ensuite p'

$$\begin{aligned}p' &= \frac{\Delta_1(t + p) - \Delta_3}{\Delta(t + p) - \Delta_2} - t' \\ &= \frac{\Delta_1 t + \Delta_1 p - \Delta_3 - t' t \Delta - t' p \Delta + t' \Delta_2}{\Delta t + \Delta p - \Delta_2}.\end{aligned}$$

En tenant compte des valeurs (1) et en simplifiant, on obtient :

$$p' = \frac{m'n' (m-n) p}{p(mn' - m'n) - mn(n' - m')}.$$

D'où il résulte que la position du point d' par rapport aux points a' , b' et c' est indépendante des valeurs t et t' , c'est-à-dire indépendante des origines O et O' sur les bases l et l' . C. q. f. d.

REMARQUE. — Puisque la position des éléments des paires nouvelles est indépendante des origines primitivement choisies, on peut prendre celles-ci d'une manière arbitraire sur les bases, en observant que les 3 paires fondamentales déterminent chaque fois des nouvelles valeurs de λ , μ et ν .

CALCUL DES COEFFICIENTS. — Nous avons eu

$$\lambda = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \mu = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \nu = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

En introduisant les valeurs tirées des déterminants, on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\Delta t' + m'n' (m-n)}{\Delta} = t' + \frac{m'n' (m-n)}{m'n' - m'n}, \\ \mu &= \frac{\Delta t + mn (n' - m')}{\Delta} = t + \frac{mn (n' - m')}{mn' - m'n}, \\ \nu &= \frac{\Delta_1 t + \Delta_2 t' - \Delta t t'}{\Delta} = tt' + \frac{tm'n' (m-n) + t'mn (n' - m')}{mn' - m'n} \end{aligned}$$

ou

$$\nu = \lambda t + \mu t' - tt'.$$

CAS PARTICULIERS : 1^o *d tombe en b ou en c.*

On a alors

$$p = m \text{ ou } p = n.$$

Supposons donc $p = n$; on obtient :

$$p' = \frac{m'n' (m-n) n}{n(mn' - m'n) - mn(n' - m')} = n'.$$

On voit que d' tombe sur l'homologue de c , soit c' .
De même avec b et b' .

2^o *Les origines sont une paire de points homologues comme a , a' .*

Dans ce cas les valeurs t et t' sont nulles et on obtient

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{m'n' (m - n)}{mn' - m'n}, \\ \mu &= \frac{mn (n' - m')}{mn' - m'n}, \\ \nu &= 0.\end{aligned}$$

L'équation générale devient :

$$xx' - \lambda x - \mu x' = 0,$$

ou

$$x' = kx,$$

avec

$$k = \frac{\lambda}{x - \mu} = \frac{m'n' (m - n)}{(mn' - m'n) x - mn (n' - m')}.$$

On voit que x' s'annule avec x

4° *Le conjugué d'un point comme b est à l'infini.*

Dans ce cas on a $m' = \infty$.

Les valeurs λ , ν et μ' ne présentant pas de remarques particulières.

La valeur μ prend la forme : $\mu = t + m = \overline{Ob}$.

Si on faisait de même $n = \infty$, c'est-à-dire si on prenait c à l'infini, on aurait

$$\lambda = t' + n' = \overline{O'c'}.$$

Les points conjugués des points à l'infini portent le nom de *points limites*.

On en conclut que les coefficients λ et μ sont donnés par les distances des points limites de chaque base à l'origine correspondante.

En outre, si les points limites étaient les origines, on aurait :

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0.$$

D'où

$$xx' = -\nu = tt'$$

t et t' désignant les distances de ces points aux points a et a' .

5° *On prend d à l'infini.*

Le conjugué d' du point d_x donne alors la distance

$$p' = \frac{m'n'(m-n)}{mn'-m'n} = \lambda - t'.$$

Cette valeur peut du reste être déduite directement du cas précédent.

L. CRELIER (Bienne, Suisse).

LA FORMULE DE STOKES

Rappelons que le théorème de Stokes se résume dans l'identité

$$\int_0 (Xdx + Ydy + Zdz) = \int_S \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) l + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) m + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) n \, dw$$

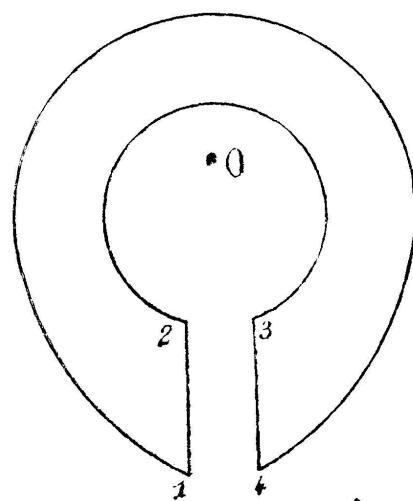
dans laquelle le premier membre est une intégrale curviligne et le deuxième une intégrale de surface limitée par le contour de la première ; X, Y, Z sont des fonctions de x, y, z , finies et continues sur la surface, admettant des dérivées finies et continues aux mêmes endroits ; l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale à l'élément dw de la surface.

Nous poserons

$$\begin{aligned} x &= f(u, v), \\ y &= g(u, v), \\ z &= h(u, v), \end{aligned}$$

de telle sorte que ce soient

$$\begin{aligned} x &= f(v_1, u), \text{ etc.} \\ x &= f(v_2, u), \text{ etc.} \end{aligned}$$



les équations des courbes 1-2 et 3-4,

et

$$\begin{aligned} x &= f(v, u_1), \text{ etc.} \\ x &= f(v, u_2), \text{ etc.} \end{aligned}$$

celles des courbes 2-3 et 1-4.