Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 5 (1903)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES DIVISIONS HOLOGRAPHIQUES

Autor: Crelier, L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-6638

SUR LES DIVISIONS HOMOGRAPHIQUES

Introduction. — Quand on développe la théorie des divisions homographiques au moyen de l'équation algébrique fondamentale

$$xx' - \lambda x - \mu x' + \nu = 0$$

on est amené à considérer deux origines O et O′ pour compter les segments x, x'.

En disant que l'équation doit être satisfaite quelles que soient les origines, on admet le fait comme évident *à priori*. Cependant nous croyons bon, dans l'intérêt des débutants de la géométrie synthétique, de donner une forme plus concrète et plus précise à ce principe, en l'énonçant comme un théorème dont la démonstration simple conduit d'une manière palpable aux propriétés connues des coefficients λ, η et ν.

Tel est le but que nous nous proposons dans les lignes qui suivent.

Définition. — On appelle divisions homographiques des suites de points telles qu'à chaque point de l'une correspond un point et un seul de l'autre.

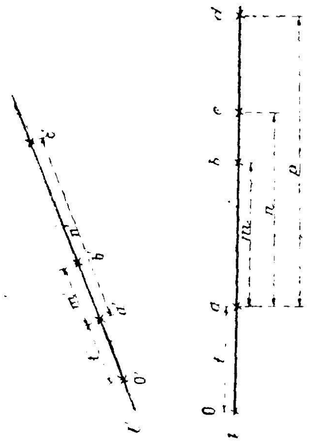
Équation. — Il existe donc entre les segments x et x' déterminés sur deux bases l et l', par deux points homologues et comptés depuis deux origines données, une équation du premier degré de la forme :

$$xx' - \lambda x - \mu x' + \nu = 0.$$

Les coefficients λ, μ, ν sont déterminés par trois paires de points homologues fondamentaux.

THÉORÈME : *Étant donné 3 paires de points homologues fondamentaux, la position des éléments d'une quatrième paire sur les bases est indépendante des origines.*

DÉMONSTRATION. — Soit O et O' les origines, a, a' ; b, b' et c, c' les 3 paires de points homologues fondamentaux. Désignons les segments comme suit :



$$Oa = t \qquad ab = m \qquad ac = n$$
$$O'a' = t' \qquad a'b' = m' \qquad a'c' = n'.$$

L'équation de définition s'appelle :

$$xx' - \lambda x' - \mu x' + \nu = 0.$$

Calculons d'abord les coefficients λ, μ et ν en formant les 3 équations correspondant aux points donnés ; nous avons :

$$\begin{aligned}
&tt' &&- \lambda t &&- \mu t' &&+ \nu = 0\\
&(t+m)(t'+m') &&- \lambda(t+m) &&- \mu(t'+m') &&+ \nu = 0,\\
&(t+n)(t'+n') &&- \lambda(t+n) &&- \mu(t'+n') &&+ \nu = 0.
\end{aligned}$$

Les solutions λ, μ et ν seront

$$\lambda = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad \mu = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad \nu = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Formons ensuite ces déterminants

$$\Delta = \begin{vmatrix} -t & -t' & +1 \\ -(t+m) & -(t'+m') & +1 \\ -(t+n) & -(t'+n') & +1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -tt' & -t' & +1 \\ -(t+m)(t'+m') & -(t'+m') & +1 \\ -(t+n)(t'+n') & -(t'+n') & +1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -t & -tt' & +1 \\ -(t+m) & -(t+m)(t'+m') & +1 \\ -(t+n) & -(t+n)(t'+n') & +1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -t & -t' & -tt' \\ -(t+m) & -(t'+m') & -(t+m)(t'+m') \\ -(t+n) & -(t'+n') & -(t+n)(t'+n') \end{vmatrix}$$

Développons et simplifions :

$$\Delta = m'n - mn',$$
$$\Delta_1 = t'(mn' - m'n) + m'n'(m - n),$$
$$\Delta_2 = t(mn' - m'n) + mn(n' - m'),$$
$$\Delta_3 = tt'(mn' - m'n) + tm'n'(m - n) + t'mn(n' - m').$$

On peut encore écrire évidemment :

$$\text{I}\quad \begin{cases} \Delta_1 = \Delta t' + m'n'(m - n), \\ \Delta_2 = \Delta t + mn\ (n' - m'), \\ \Delta_3 = \Delta_1 t + \Delta_2 t' - \Delta tt'. \end{cases}$$

Prenons maintenant un 4^e point d sur l, donnant

$$x = t + p \text{ avec } p = ad.$$

Son homologue d' sur l' donne

$$x' = t' + p' \text{ avec } p' = a'd'.$$

La valeur x' se déduira de celle de x d'après l'équation fondamentale :

$$xx' - \lambda x - \mu x' + \nu = 0.$$

On aura :

$$x' = \frac{\lambda x - \nu}{n - \mu}.$$

Introduisons les valeurs des déterminants :

$$x' = \frac{\frac{\Delta_1}{\Delta}x - \frac{\Delta_3}{\Delta}}{x - \frac{\Delta_2}{\Delta}} = \frac{\Delta_1 x - \Delta_3}{\Delta x - \Delta_2}.$$

Avec les segments p, t, p' et t', on a :

$$p' + t' = \frac{\Delta_1(t + p) - \Delta_3}{\Delta(t + p) - \Delta_2}.$$

Développons ensuite p'

$$p' = \frac{\Delta_1(t + p) - \Delta_3}{\Delta(t + p) - \Delta_2} - t'$$
$$= \frac{\Delta_1 t + \Delta_1 p - \Delta_3 - t't\Delta - t'p\Delta + t'\Delta_2}{\Delta t + \Delta p - \Delta_2}.$$

En tenant compte des valeurs (1) et en simplifiant, on obtient :

$$p' = \frac{m'n'(m-n)p}{p(mn'-m'n)-mn(n'-m')}.$$

D'où il résulte que la position du point d' par rapport aux points a', b' et c' est indépendante des valeurs t et t', c'est-à-dire indépendante des origines O et O' sur les bases l et l'. C. q. f. d.

Remarque. — Puisque la position des éléments des paires nouvelles est indépendante des origines primitivement choisies, on peut prendre celles-ci d'une manière arbitraire sur les bases, en observant que les 3 paires fondamentales déterminent chaque fois des nouvelles valeurs de λ, μ et ν.

Calcul des coefficients. — Nous avons eu

$$\lambda = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad \mu = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad \nu = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

En introduisant les valeurs tirées des déterminants, on obtient :

$$\lambda = \frac{\Delta t' + m'n'(m-n)}{\Delta} = t' + \frac{m'n'(m-n)}{mn'-m'n},$$

$$\mu = \frac{\Delta t + mn(n'-m')}{\Delta} = t + \frac{mn(n'-m')}{mn'-m'n},$$

$$\nu = \frac{\Delta_1 t + \Delta_2 t' - \Delta tt'}{\Delta} = tt' + \frac{tm'n'(m-n) + t'mn(n'-m')}{mn'-m'n}$$

ou

$$\nu = \lambda t + \mu t' - tt'.$$

Cas particuliers : 1° d *tombe en* b *ou en* c.

On a alors

$$p = m \text{ ou } p = n.$$

Supposons donc $p = n$; on obtient :

$$p' = \frac{m'n'(m-n)n}{n(mn'-m'n)-mn(n'-m')} = n'.$$

On voit que d' tombe sur l'homologue de c, soit c'.

De même avec b et b'.

2° *Les origines sont une paire de points homologues comme* a, a'.

Dans ce cas les valeurs t et t' sont nulles et on obtient

$$\lambda = \frac{m'n'(m-n)}{mn'-m'n},$$

$$\mu = \frac{mn(n'-m')}{mn'-m'n},$$

$$\nu = 0.$$

L'équation générale devient :

$$xx' - \lambda x - \mu x' = 0,$$

ou

$$x' = kx,$$

avec

$$k = \frac{\lambda}{x-\mu} = \frac{m'n'(m-n)}{(mn'-m'n)\,x - mn(n'-m')}.$$

On voit que x' s'annule avec x

4° *Le conjugué d'un point comme* b *est à l'infini.*

Dans ce cas on a $m' = \infty$.

Les valeurs λ, ν et p' ne présentant pas de remarques particulières.

La valeur μ prend la forme : $\mu = t + m = \overline{\mathrm{O}b}$.

Si on faisait de même $n = \infty$, c'est-à-dire si on prenait c à l'infini, on aurait

$$\lambda = t' + n' = \overline{\mathrm{O}'c'}.$$

Les points conjugués des points à l'infini portent le nom de *points limites*.

On en conclut que les coefficients λ et μ sont donnés par les distances des points limites de chaque base à l'origine correspondante.

En outre, si les points limites étaient les origines, on aurait :

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0.$$

D'où

$$xx' = -\nu = tt'$$

t et t' désignant les distances de ces points aux points a et a'.

5° *On prend* d *à l'∞.*

Le conjugué d' du point d_x donne alors la distance

$$p' = \frac{m'n'(m-n)}{mn' - m'n} = \lambda - t'.$$

Cette valeur peut du reste être déduite directement du cas précédent.

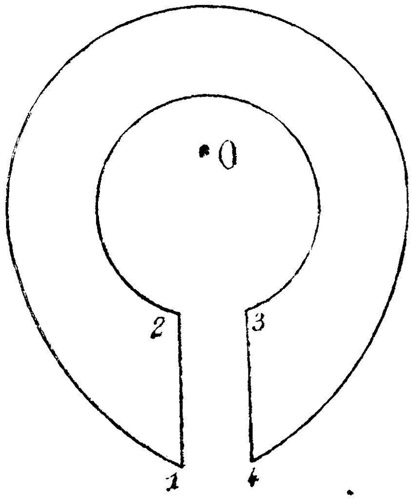
L. Crelier (Bienne, Suisse).

LA FORMULE DE STOKES

Rappelons que le théorème de Stokes se résume dans l'identité

$$\int_0 (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)$$
$$= \int_{\mathrm{S}} \left\{ \left(\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z} \right) l + \left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x} \right) m + \left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} \right) n \right\} d\omega$$

dans laquelle le premier membre est une intégrale curviligne et le deuxième une intégrale de surface limitée par le contour de la première ; X, Y, Z sont des fonctions de x, y, z, finies et continues sur la surface, admettant des dérivées finies et continues aux mêmes endroits ; l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale à l'élément $d\omega$ de la surface.



Nous poserons

$$x = f(u, v),$$
$$y = g(u, v),$$
$$z = h(u, v),$$

de telle sorte que ce soient

$$x = f(v_1, u), \text{ etc.}$$
$$x = f(v_2, u), \text{ etc.}$$

les équations des courbes 1-2 et 3-4, et

$$x = f(v, u_1), \text{ etc.}$$
$$x = f(v, u_2), \text{ etc.}$$

celles des courbes 2-3 et 1-4.