Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 5 (1903)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES LIMITES ET L'ATOME

Autor: Bonnel, J.-F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-6637

LES LIMITES ET L'ATOME

On appelle ordinairement *limite* d'une quantité variable, en Géométrie, une quantité fixe dont la variable peut s'approcher indéfiniment, sans jamais pouvoir l'atteindre. Cette condition imposée à la limite, de ne pouvoir jamais être atteinte par la variable, est formulée en termes trop absolus. Ne sait-on pas que la tangente en un point A d'une courbe est la limite des positions que prend une sécante, issue du point A, lorsqu'elle a tourné autour de ce point, de manière à ce qu'un second point d'intersection de la sécante avec la courbe vienne se confondre avec le premier ? La parallèle menée par un point O à une droite n'est-elle pas la limite des positions que prend la perpendiculaire abaissée du point O sur la droite, lorsqu'on la fait tourner autour de ce point d'un angle droit ? Et dans ces deux cas, du moins, n'est-il pas visible que la variable atteint sa limite, et exactement ?

Il est vrai que, si l'on cherche à atteindre cette limite en appliquant à la variable une construction géométrique, on n'y réussira pas. Si, par exemple, après avoir mené par le point A d'une courbe une première sécante, on détermine la seconde en joignant le point A au milieu de l'arc que sous-tend la première ; si l'on opère de même sur la seconde pour avoir la troisième, et ainsi de suite ; on obtiendra des sécantes qui s'approcheront de plus en plus et même indéfiniment de la tangente ; mais, aucune moitié d'un arc ne pouvant être nulle, jamais la sécante ne deviendra tangente. De même, dans le cas de la parallèle, si l'on joint le point O à des points de la droite de plus en plus éloignés de la perpendiculaire, on obtiendra des obliques faisant avec cette perpendiculaire un angle de plus en plus grand et même indéfiniment voisin de 90 degrés, mais, les points ne pouvant pas être à l'infini sur la droite, jamais l'oblique ne deviendra ainsi la parallèle.

Ce qui arrive là n'est pas un fait accidentel, mais une règle générale : toute construction géométrique permet d'atteindre l'indéfiniment petit ou l'indéfiniment grand, mais jamais zéro ni l'infini ; par conséquent, toute limite dont la définition renferme implicitement toute l'idée de l'infini ou de zéro, — et c'est ici le cas —, échappe à la possibilité d'être atteinte par une opération géométrique exécutée sur la variable.

Au contraire, si l'on a recours à un mouvement de rotation, la limite est atteinte à la suite des valeurs indéfiniment croissantes de la variable, absolument comme l'une quelconque d'entre elles succède à la précédente.

A quoi cela tient-il ? Les résultats dus à une construction géométrique sont nécessairement discontinus et par suite ne représentent qu'un certain nombre des valeurs possibles de la variable, tandis que le mouvement de rotation, étant continu, nous les donne toutes, sans exception. Il nous donne non seulement les valeurs de la variable qui sont fournies par l'opération graphique ou fictive, mais encore toutes les valeurs intermédiaires dont cette opération ne laisse aucune trace. En outre, quand la rotation a permis d'amener la droite mobile sur la valeur extrême que peut atteindre la construction géométrique, rien n'empêche de continuer le mouvement de la droite qui a été utilisé jusque là et de franchir la limite que la construction est impuissante à dépasser. C'est ainsi que, dans le premier cas considéré, le second point de la sécante mobile vient se confondre avec le premier et la limite zéro se trouve atteinte à la suite de l'indéfiniment petit ; dans le second cas, à la suite d'obliques indéfiniment longues, l'infini se présente nécessairement, au moment où l'angle que font ces obliques avec la perpendiculaire devient droit.

Appliquons cette remarque à d'autres exemples classiques.

La circonférence d'un cercle est la limite du périmètre d'un polygone régulier inscrit au cercle et dont le nombre des côtés augmente indéfiniment.

Supposons qu'on parte du carré inscrit, et, qu'en divisant en deux unités l'arc sous-tendu par son côté, on ait inscrit l'octogone régulier, puis le polygone régulier de 16, 32..... côtés ; on parviendra ainsi, au moins mentalement, à un polygone régulier dont les côtés seront indéfiniment petits. Mais il est clair que l'opération, même poussée par la pensée aussi loin qu'on voudra, ne peut pas nous donner un côté de longueur nulle, autrement dit, la construction géométrique ne permet pas d'atteindre la limite zéro. Si, au contraire, on fait tourner autour du centre de la circonférence un des deux rayons qui aboutissent aux extrémités d'un côté du carré, de manière à ce qu'il se rapproche de l'autre supposé fixe, on voit immédiatement que l'extrémité du rayon mobile passera, d'une part, par le milieu de tous les arcs intermédiaires à ceux-là, que l'opération graphique ou fictive n'a pas envisagés. En outre, quand la rotation aura amené le rayon mobile à passer par l'extrémité du plus petit côté que puisse atteindre la construction géométrique, rien ne s'oppose à ce que le mouvement qui a été utilisé jusque-là, soit continué, de manière à réduire ce côté extrême et l'arc qu'il sous-tend à égaler la limite zéro.

L'asymptote à une branche d'hyperbole peut être regardée comme la limite des sécantes menées par le centre et dont le point d'intersection s'éloigne à l'infini. Mais il est clair qu'une détermination géométrique de pareilles sécantes, ne peut donner, comme dans les exemples précédents, que des sécantes indéfiniment grandes, tandis que, en faisant tourner une droite autour du centre de l'hyperbole, on a la certitude d'obtenir successivement toutes les sécantes possibles, et même, au delà de la sécante indéfinie la plus grande que puisse fournir la construction géométrique, l'asymptote qui en est la limite.

Le mouvement de rotation dont nous venons de signaler l'utilité dans le plan, n'est pas moins précieux dans l'espace. Considérons, en effet, un cône droit circulaire; coupons-le par un plan qui passe par deux génératrices opposées ; puis, par un point quelconque pris sur l'une des génératrices, menons une droite qui soit perpendiculaire à leur plan et une autre qui soit parallèle à la génératrice opposée. Le plan que déterminent la parallèle et la perpendiculaire est, comme on le sait, parallèle à la génératrice opposée : la section faite dans le cône par ce plan est donc une *parabole*. Si l'on fait maintenant tourner ce plan autour de la perpendiculaire comme axe et vers le sommet du cône, la section obtenue devient une *ellipse*, puis un *cercle*, puis encore une ellipse, et enfin une *droite limitée*; si on fait tourner ce même plan en sens contraire, la section obtenue devient une *hyperbole*, puis une *droite illimitée.* Le cercle peut donc être considéré comme la limite d'une ellipse, et la parabole comme la limite soit d'une ellipse, soit d'une hyperbole. Or la limite est ici atteinte effectivement, on le voit, par le mouvement de rotation d'un plan, en raison même de la continuité de ce mouvement, comme toutes les circonstances précédemment signalées.

Mais si l'on cherche, en dehors de tout mouvement et en partant d'une propriété géométrique, à établir que le cercle ou la parabole est une limite de l'ellipse, ou encore que l'hyperbole a pour limite soit une parabole soit une droite illimitée, le résultat est tout différent.

Vous pouvez doubler, tripler quadrupler, etc. la distance des deux foyers d'une ellipse, par exemple en fixant l'un d'eux et le sommet voisin, vous obtiendrez ainsi des ellipses s'allongeant et s'approchant indéfiniment de la forme parabolique, mais jamais le second foyer ne pourra être transporté à l'infini, et, par suite, jamais l'ellipse ne sera transformée en parabole. De même, si vous réduisez la distance focale à sa moitié, son tiers, son quart, elle n'égalera jamais zéro, et, par suite, l'ellipse ne deviendra jamais un cercle. Même chose pour l'hyperbole.

En résumé, ce qui précède nous montre qu'une figure variable susceptible de s'approcher indéfiniment d'une limite, l'atteint régulièrement, si le rapprochement résulte d'un mouvement continu de rotation, qui est toujours possible, et qu'au contraire elle ne l'atteint jamais, si le rapprochement résulte d'une construction géométrique. Nous sommes donc en droit de conclure, ainsi que nous l'avons dit en commençant, que cette condition imposée à une limite, de ne pas pouvoir être atteinte par la variable, est trop absolue, et qu'il sera permis, à un aussi juste titre, de remplacer dans la définition les quatre derniers mots « sans jamais pouvoir l'atteindre », par ceux-ci : « au point de se confondre avec elle », puisqu'une figure variable qui arrive à sa limite ne doit en rien et en aucun cas se distinguer de cette limite.

Comment se fait-il que quelques savants aient cherché à transformer en principe général cette prétendue impossibilité pour une variable d'atteindre sa limite, et à l'expliquer, par l'existence, dans la définition de l'une, d'un ou plusieurs éléments incompatibles avec la définition de l'autre ? pas assez incompatibles néanmoins pour les empêcher de se rapprocher l'une de l'autre, à ce point que, si l'on prend la limite pour valeur de la variable, l'erreur commise devienne rigoureusement nulle? Comment surtout est-il venu à l'esprit d'un géomètre d'introduire dans la définition d'une limite cette condition parfaitement inutile et démentie par tous les exemples qu'on connaît ? il faut, pour en découvrir l'origine, se reporter à la pratique initiale du Calcul différentiel.

Leibniz, l'inventeur de ce calcul, appelait limite d'un rapport le rapport de l'accroissement infiniment petit dy d'une fonction à l'accroissement infiniment petit dx de la variable. D'après cette définition, le rapport $\frac{dy}{dx}$ est égal à la dérivée $f'(x)$ de la fonction, et l'on a l'égalité $\frac{dy}{dx}=f'(x)$, d'où l'on tire pour la valeur de la différentielle (diminutif de différence) de la fonction : $dy=f'(x)\,dx$. Mais cette formule n'est pas absolument exacte, attendu que la dérivée $f'(x)$ d'une fonction n'est pas égale au rapport $\frac{dy}{dx}$ quand les termes de ce rapport sont très petits, mais bien quand ils sont rigoureusement nuls.

Pour parer à l'inconvénient qui en pourrait résulter, quelques géomètres ont imaginé de conserver dans cette formule les termes dy et dx en les regardant comme de purs symboles de zéro. Grâce à cette convention, la formule redevient exacte et peut être introduite dans le Calcul différentiel. D'autres géomètres ont procédé d'une manière toute différente. Puisque $f'(x)$ est égal à $lim\frac{\Delta y}{\Delta x}$, on peut poser $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$, et, par suite, $\Delta y=f'(x)\,\Delta x+\alpha\,\Delta x$, α étant une quantité qui s'évanouit en même temps que Δx devient nul. Cette formule nous montre que l'accroissement d'une fonction correspondant à un accroissement quelconque de la variable est composé de deux parties : la seconde tend vers zéro en même temps que Δx ; la première est ce qu'on nommera la différentielle de la fonction et qu'on représentera par dy. Comme d'ailleurs la différentielle de la variable, ou dx, ne se distingue pas de son accroissement Δx, on pourra écrire la relation suivante $dy = f'(x)\,dx$, dire qu'elle est vraie pour toute valeur finie ou indéfiniment petite de l'accroissement de la variable, et lui appliquer toutes les règles du Calcul différentiel.

Toutefois il y a une valeur pour laquelle cette formule est en défaut ; c'est la valeur limite $dx = 0$, qui est nécessaire pour la définition de la dérivée et de toutes les dérivées, et qu'il est impossible de ne pas introduire finalement dans les formules, quand on voudra passer aux limites. La rigueur de ce procédé resterait donc, en définitive, plus apparente que réelle si ceux qui l'ont imaginé s'en étaient tenus là. Ils ont alors inventé, pour échapper à ce défaut de rigueur, d'imposer à la définition d'une limite cette condition bizarre qu'une variable ne peut jamais atteindre sa limite. Grâce à ce subterfuge, on n'a plus à s'inquiéter de ce qui se passe à la limite dans le Calcul infinitésimal ; les infiniment petits sont toujours décroissants et ne s'évanouissent jamais, quoique pouvant approcher d'aussi près qu'on le veut de zéro.

Nous avons vu, sur de nombreux exemples géométriques, que cette condition est faussement imposée à la limite des grandeurs variables. Elle n'est pas davantage acceptable, lorsqu'il s'agit de la définition d'une dérivée ou d'une différentielle de fonction ; on s'en assure, comme nous l'avons fait pour la définition d'une tangente. Ce qui importe, c'est de faire voir comment, avec l'atome, peuvent se résoudre toutes les difficultés ; nous allons brièvement l'indiquer.

D'après la théorie de l'atome, il y a toujours un accroissement ε de la variable indépendante, qui est le plus petit auquel puisse correspondre un accroissement η de la fonction ; le rapport $\frac{\eta}{\varepsilon}$ est, par définition, la dérivée de la fonction, de telle sorte qu'on a l'égalité vraie : $\frac{\eta}{\varepsilon} = f'(x)$. Dans cette relation, les deux termes η et ε ne sont pas des symboles de zéro, ni des quantités indéterminées, mais des atomes correspondants, c'est-à-dire des réalités concrètes et déterminées, qui, en raison de leur état atomique, semblent mieux appropriées que toute autre à l'idée qu'on doit se faire du mode de génération d'une courbe ; dans la génération d'une courbe, ce rapport $\frac{\eta}{\varepsilon}$ représenterait l'atome de direction.

De cette définition on déduit immédiatement les propriétés générales des dérivées, celle des fonctions inverses, celle d'une fonction dont la dérivée est constante, celle des fonctions qui ont la même dérivée, celle du maximum et du minimum d'une fonction ; etc. Si, après cela, on veut bien avoir présente à l'esprit cette vérité que, dans le calcul, ce qui est plus petit que l'atome ε est nul ou de nul effet pour l'accroissement de la fonction, on trouvera sans peine la dernière valeur de ε, qui est $(1+\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon}$, la dérivée de x^m, de la fonction exponentielle et logarithmique, des fonctions trigonométriques directes et inverses, enfin de toutes celles qu'on est convenu de désigner sous le nom de fonctions simples.

Voici en outre une conséquence très importante de cette définition de la dérivée par les atomes, définition qui est identique au fond à celle de Leibniz : si l'on a formé une équation entre des indéfiniment petits de différents ordres, et qu'on veuille en dégager la relation propre à ceux qui sont de l'ordre le moins élevé, il suffira de supprimer tous les termes où figurent les autres, comme étant nuls ou de nul effet ; en d'autres termes, il est permis, dans un calcul d'indéfiniment petits d'un certain ordre, de négliger à volonté tous les indéfiniment petits d'un ordre supérieur. On voit, d'après cela, quels avantages sont attachés à la substitution de l'atome à la place de zéro dans toutes les questions de limite, comme à la substitution de l'indéfini à la place de l'infini : toutes les contradictions que nous avons signalées, toutes les difficultés qu'on rencontre à se mettre en face de zéro et de l'infini ou à vouloir les éviter, disparaissent avec l'atome et son inverse qui est l'indéfiniment grand.

J.-F. Bonnel (Lyon).