Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 5 (1903)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: THÉORIE DES PARALLÈLES EUCLIDIENNES
Autor: Commolet
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-6636

THÉORIE DES PARALLÈLES EUCLIDIENNES

Pour éviter des répétitions il sera entendu dans ce qui va suivre que nous raisonnons sur un même plan.

Si une droite CD (fig. 1) s'éloigne d'une droite AB — c'est-à-dire si les perpendiculaires MP, M_1P_1... abaissées des points de CD sur AB vont en croissant — elle continuera à s'en éloigner dans le même sens, et à s'en rapprocher dans le sens contraire, tant qu'elle n'atteindra pas AB. Rencontrera-t-elle AB dans le sens où elle s'en rapproche ? Ce n'est pas évident *a priori*, car quand on se pose cette question, le cas des asymptotes se présente aussitôt à l'esprit. Nous y répondrons plus loin, n'ayant pas besoin d'élucider ce point pour établir la théorie qui fait l'objet de ce travail, et c'est précisément en cela qu'elle est intéressante.

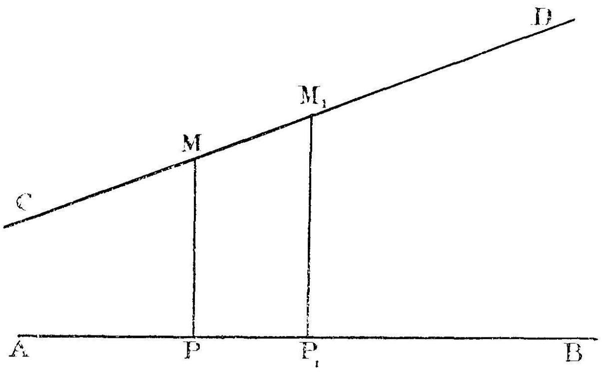

Fig. 1.

Nous retenons seulement le fait de la constance de l'éloignement ou du rapprochement qui, d'après le concept que nous avons de la ligne droite, ne peut pas ne pas s'imposer à l'esprit. Il est d'ailleurs susceptible de pouvoir être vérifié par une expérimentation directe.

Nous pouvons donc en faire un axiome ou postulat au même titre que les autres axiomes ou postulats de la ligne droite dont on ne saurait sérieusement contester qu'il n'aient leur origine dans l'observation ou l'expérience.

Cette origine nous échappe par suite de l'habitude, les propriétés de la ligne droite ayant été épurées depuis longtemps, et étant devenues des données d'intuition. Mais une analyse un peu profonde ne permet pas de la méconnaître.

Or en n'admettant que les propriétés de la ligne droite considérée en elle-même, on ne définit pas complètement cette ligne. Il faut y ajouter une propriété du même ordre concernant sa manière d'être par rapport à une autre droite, propriété qui ne peut se déduire des premières, comme c'est établi aujourd'hui, que nous savons certaine dans le monde extérieur accessible à nos observations et sans laquelle le développement logique de la géométrie ordinaire est impossible. Seulement on doit chercher une façon de présenter cette propriété qui entraîne immédiatement notre adhésion, et ce n'est le cas, ni de la forme donnée par Euclide dans son postulat V, ni de celle qui lui a été substituée.

La forme suivante répond à ce but.

Axiome. — *Si deux droites se rapprochent dans un sens, elles s'éloignent constamment dans le sens contraire*, et inversement (tant qu'elles ne se coupent pas).

Ainsi énoncé, cet axiome s'impose immédiatement à nous comme vrai. Nous ne pouvons concevoir, en effet, sans faire violence à notre esprit, que deux droites se rapprochent après s'être éloignées, ni qu'elles s'éloignent après s'être rapprochées.

Définition. — Une droite est dite *parallèle* à une autre quand tous ses points sont à la même distance de cette autre.

Théorème I. — *Deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles l'une à l'autre.*

Soient deux droites AB, CD perpendiculaires à une troisième E F (fig. 2). En faisant tourner le demi-plan (R) autour de E F pour l'appliquer sur le demi-plan (S), HB viendra sur HA et KD sur KC. Si donc les droites AB, CD se rapprochaient ou s'éloignaient dans la région (R), elles se rapprocheraient ou s'éloigneraient dans la région (S), ce qui est contraire à l'axiome posé plus haut. Les perpendiculaires abaissées par exemple de CD sur AB sont égales. Mais on peut remarquer que ces perpendiculaires sont aussi perpendiculaires à CD. Soit en effet une perpendiculaire MP abaissée d'un point quelconque M de CD sur AB, on a

MP = KH. Joignons MH et PK. Les deux triangles PHK, HMP sont égaux comme ayant un angle droit égal compris entre côtés égaux, d'où PK = MH. Par suite les deux triangles HKM, PMK

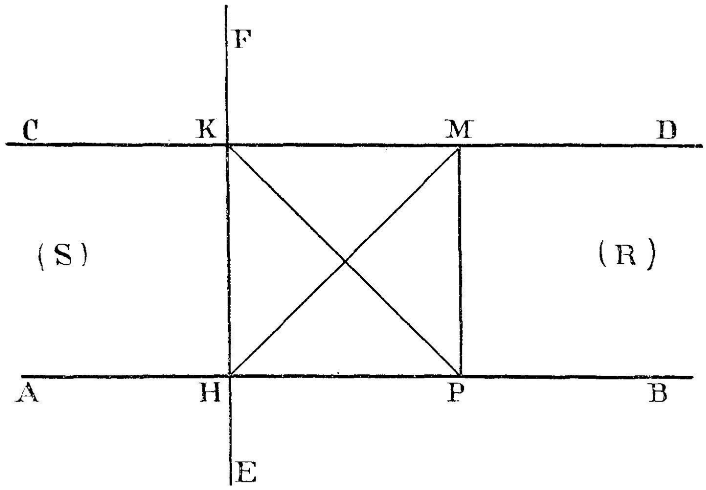

Fig. 2.

ont leurs trois côtés égaux et sont égaux. On en déduit $\widehat{HKM} = \widehat{PMK}$. Le premier étant droit, il en est de même du second. Les distances de chacune des deux droites AB, CD à l'autre sont donc les mêmes.

Ainsi se trouve nettement établie l'existence de deux droites parallèles.

Théorème II. — *Par un point pris à l'extérieur d'une droite, on peut mener une parallèle à cette droite, et on ne peut en mener qu'une.*

Soient la droite AB et le point C (fig. 3). Menons CD perpen-

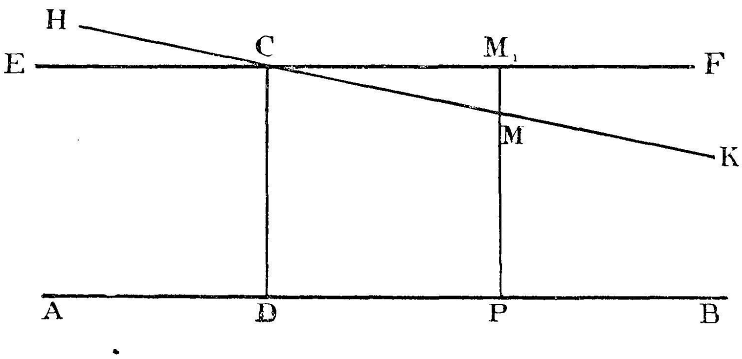

Fig. 3.

diculaire à AB, et EF perpendiculaire à CD au point C. La droite EF sera parallèle à AB, d'après le théorème I, et c'est la seule.

Considérons en effet une autre droite HK passant par le point C et faisant avec EF un angle aussi petit qu'on le veut. Une partie de cette droite fera avec CD un angle aigu, soit CK cette partie. Abaissons d'un point M de CK la perpendiculaire MP sur AB, et désignons par M_1 le point où MP prolongé rencontre EF. On a $MP < M_1P$, et comme $M_1P = CD$, il s'ensuit $MP < CD$. Donc HK n'est pas parallèle à AB.

Corollaire. — *Quand deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.*

Théorème III. — *Deux droites AB, CD parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.*

On démontrera facilement que AB et CD sont perpendiculaires à une même droite.

Les autres théorèmes dérivant des parallèles : égalité des angles alternes-internes, somme des angles d'un triangle, etc., se démontreront comme d'habitude ; mais on pourra les démontrer de la manière suivante.

Soient deux parallèles AB et CD et la sécante EF (fig. 4). Menons KR perpendiculaire sur AB et HP perpendiculaire à CD.

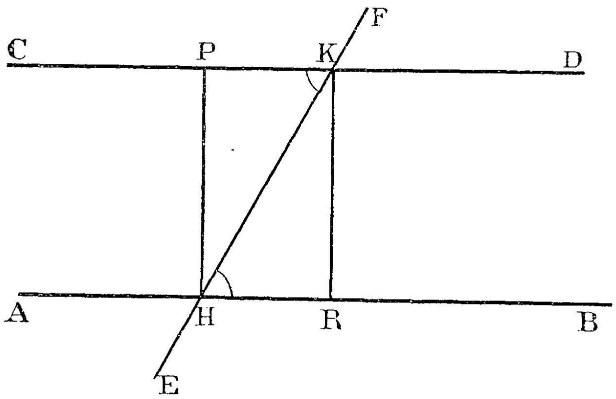

Fig. 4.

Les deux triangles rectangles HKP, HRK sont égaux, car $HP = KR$. Donc $\widehat{KHR} = \widehat{HKP}$.

En remarquant que la figure HRKP a quatre angles droits et que la somme des angles du triangle HPK égale la somme des angles du triangle HRK, on voit que la somme des angles d'un triangle rectangle égale deux angles droits.

Pour démontrer qu'il en est de même de la somme des angles d'un triangle quelconque, il suffira de mener une hauteur qui soit située à l'intérieur du triangle, ce qui est toujours possible.

Nous ajouterons pour compléter cette théorie que *deux droites parallèles ne se rencontrent pas*, ce qui découle de définition même, et que *deux droites qui ne sont pas parallèles se rencontrent.*

On pourra trouver diverses démonstrations de cette dernière proposition.

En voici une :

Soit la droite CD non parallèle à AB. Menons d'un point M de CD la perpendiculaire MP à AB, et la parallèle EF à AB passant par M.

La droite CD forme avec MP deux angles inégaux dont l'un aigu et l'autre obtus (fig. 5). Supposons que $\widehat{PMD}$ soit l'angle

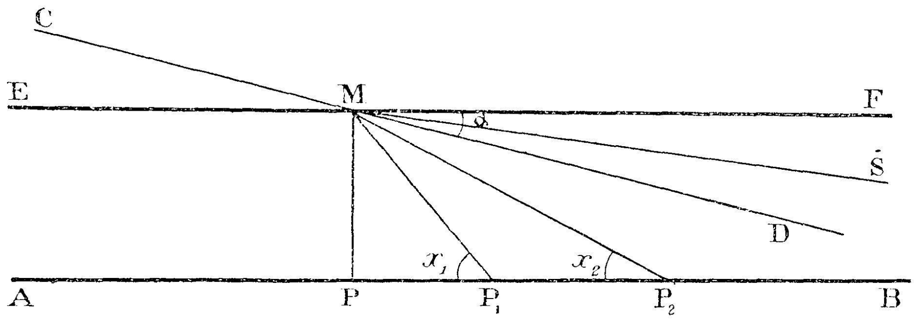

Fig. 5.

aigu. Prenons sur AB, à partir de P dans le sens AB, $PP_1 = MP$, $P_1P_2 = MP_1$... et désignons par x_1, x_2... x_n les angles $\widehat{PP_1M}$, $\widehat{P_1P_2M}$... égaux respectivement aux angles $\widehat{P_1MF}$, $\widehat{P_2MF}$... comme alternes-internes.

On a

$$x_1 = \frac{1^{dr}}{2},\ x_2 = \frac{x_1}{2} = \frac{1^{dr}}{2^2},\ x_3 = \frac{1^{dr}}{2^3} \ldots x_n = \frac{1^{dr}}{2^n}.$$

Il sera donc possible, en appelant α l'angle $\widehat{DMF}$, de trouver un angle x_n, tel que l'on ait $x_n < \alpha$.

La sécante correspondante MS fera avec MF un angle plus petit que α, et sera dès lors comprise entre MD et MF. Comme elle rencontre AB, MD rencontrera aussi nécessairement AB.

Pour rester logique on devra définir une parallèle à un plan : *une droite qui reste à la même distance du plan.*

De même, un plan sera dit *parallèle* à un autre si tous ses points sont à la même distance de cet autre.

Ces définitions venant à la suite des théorèmes sur les droites et plans perpendiculaires, on démontrera facilement qu'*une droite et un plan*, ou que *deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.*

Cette théorie des parallèles nous paraît beaucoup plus satisfaisante que la théorie classique actuelle.

Elle nous a été suggérée par la lecture de l'excellent livre de M. de Freycinet : *De l'expérience en géométrie.* Nous n'avons fait que la développer et la préciser pour la rendre applicable à l'enseignement.

Il importe de débarrasser les bases de la géométrie ordinaire de la considération de la rencontre ou de la non-rencontre de deux droites en présence du développement des géométries non-euclidiennes qui forment des systèmes cohérents, logiquement coordonnés, où on n'a relevé aucune contradiction, par conséquent très intéressants au point de vue spéculatif, mais dans lesquels, la correspondance entre les formes conçues et les formes réalisées est moins grande que dans le système euclidien, parce qu'ils négligent une donnée fondamentale d'expérience.

La ligne droite, telle que la conçoivent les néo-géomètres n'est plus celle du sens commun.

Commolet (Paris).