Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 5 (1903)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPOS D'UN RÉCENT EXPOSÉ DES PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNE

Autor: BONOLA, ROBERTO

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-6635

A PROPOS D'UN RÉCENT EXPOSÉ DES PRINCIPES

DE LA GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNE

1. — La Géométrie non-euclidienne, descendue des régions hyperboréennes où elle semblait confinée, commence, depuis quelques années, à entrer dans le domaine des connaissances communes. Tous ceux qui s'occupent actuellement de Mathématiques et de Philosophie savent que, pendant longtemps, on a discuté au sujet du principe des parallèles et qu'aujourd'hui, à côté de la géométrie classique, on considère d'autres géométries logiquement compatibles.

A la diffusion de ces idées parmi les jeunes savants ont contribué les cours que quelques-uns des plus éminents géomètres ont fait dans les Universités italiennes et allemandes et surtout les exposés systématiques des *recherches sur les fondements de la Géométrie*, qui ont paru depuis quelques années.

Ces exposés ont non seulement élargi le domaine de la Géométrie non-euclidienne, mais ils ont encore contraint les esprits bien organisés à suivre les édifices variés et admirables qui ont été inspirés par la renaissance scientifique, caractéristique du XIXe siècle, et à se rendre compte des connexions qui existent entre les branches les plus élevées des Mathématiques et d'intéressants problèmes de Psycho-physiologie (1).

C'est pourquoi un exposé rapide, simple, élémentaire des principes de la Géométrie non-euclidienne sera toujours bien accueilli.

---

(1) La connexion entre les Mathématiques, la Philosophie et les sciences expérimentales est amplement traitée et discutée d'une façon tout à fait nouvelle et personnelle dans le récent volume de H. Poincaré : *La Science et l'Hypothèse* (Ed. Flammarion). Dans ce volume sont réunis et coordonnés dans un but unique, les divers articles que l'illustre savant a publiés depuis 1890, dans les revues de Philosophie et de Mathématiques.

Mais prenons garde : en se pressant on risquerait d'être obscur pour les commençants et la trop grande simplicité peut se confondre avec l'inexactitude ! La tâche de celui qui se propose d'écrire un petit traité sur les fondements de la Géométrie n'est pas aisée, s'il veut tenir compte des exigences scientifiques et didactiques, qui semblent souvent inconciliables !

2. — Le livre récent de M. BARBARIN : *La Géométrie non-euclidienne* (1) ne répond que partiellement au but auquel il semble destiné. L'exposé, réduit souvent au seul énoncé des théorèmes, est peut-être trop rapide (2) ; les notices historiques, qui en de tels sujets sont d'une importance capitale, présentent de notables lacunes ; les observations critiques sur les définitions et sur les postulats d'Euclide ne sont pas très nettes et précises.

Dans l'exposé schématique des *principes*, l'auteur indique les deux méthodes qu'on peut suivre pour le développement élémentaire du sujet dont il s'occupe, et montre ensuite comment ces méthodes concordent dans les résultats.

Suivant la première, l'auteur limite ses considérations à une *région normale* de plan, région dans laquelle *deux points déterminent sans exception une droite*, il discute les trois cas que présente le quadrilatère birectangle et isocèle de Saccheri, et il en déduit les théorèmes sur la somme des angles d'un triangle.

Passant ensuite de la région normale au plan complet, il détermine trois systèmes géométriques, caractérisés par les propriétés suivantes :

SYSTÈME EUCLIDIEN. — a) *Par un point passe une seule parallèle*, etc. ; b) *Deux droites ne peuvent enclore une portion de plan*.

SYSTÈME DE LOBATSCHEFFSKIJ. — a) *Par un point passent deux parallèles*, etc. ; b) *Deux droites ne peuvent enclore une portion de plan*.

(1) Paris, C. Naud, 1902, 79 pages.

(2) Il est juste de faire remarquer que ce livre faisant partie de la *Collection Scientia*, M. Barbarin s'est vu forcé de faire de nombreuses coupures afin de ne pas dépasser les 80 pages mises à sa disposition. LA RÉDACTION.

Système riemannien. — a) *Il n'existe pas de parallèles;* b) *Deux droites renferment toujours une portion de plan.*

En suivant la méthode d'Euclide et de Lobatscheffskij, et l'hypothèse que dans le plan entier est valable le principe de la détermination unique de la droite passant par deux points, l'auteur déduit les théorèmes de Legendre sur la somme des angles des triangles ([1]) et par conséquent les deux premiers systèmes rappelés ci-dessus.

De l'hypothèse que deux droites aient plus d'un point commun, il déduit que la somme en question surpasse deux angles droits, et en conséquence il obtient le système de Riemann.

Ces conclusions et d'autres analogues, qui souvent se rencontrent dans les écrits relatifs à la Géométrie non-euclidienne, ne nous semblent pas pleinement justifiables : ils représentent plutôt le fruit d'une étude insuffisamment profonde des principes de la Géométrie, ou, peut-être encore, une tentative, non conforme à la nature du sujet, d'éviter certaines difficultés qu'il vaudrait mieux montrer dès le principe. Il nous semble donc opportun de mettre en relief tout ce qu'elles contiennent de non rigoureux.

3. — Limitons-nous ici à la Géométrie élémentaire du plan. Deux voies se présentent, ainsi que l'indique M. Barbarin. La plus simple, celle d'Euclide, Lobatscheffskij, Bolyai, part d'un système de postulats valable dans le plan complet, et par elle on démontre un premier groupe de propositions; ensuite on retrouve les diverses branches qui donnent naissance aux divers systèmes géométriques. Alors, si l'on admet que le postulat relatif à la détermination de la droite ne souffre aucune exception, on se trouve en présence non seulement des deux types de Géométrie, euclidienne et de Lobatscheffskij, comme le supposent M. Barbarin (Cfr. l'ouvrage en question, p. 25) et d'autres auteurs, mais encore d'un troisième type qui a été mis en lumière par M. Klein dès 1872 et appelée par lui *Géométrie elliptique* ([2]).

([1]) Ces théorèmes, sous une forme un peu différente, appartiennent à Saccheri; on pourrait les appeler *théorèmes de Saccheri.*

([2]) La Géométrie elliptique fut découverte par Cayley en 1859. Elle apparut alors avec la Géométrie *hyperbolique*, comme une généralisation projective de la métrique ordinaire. M. Klein mit en évidence le lien qui existe entre les *métriques projectives* de Cayley et la Géométrie de Lobatschefskij et Bolyai.

En Géométrie elliptique, la droite est une ligne fermée et la somme des angles d'un triangle est supérieure à deux droits. Il s'ensuit que le premier théorème de Legendre sur la somme des angles d'un triangle ne se déduit pas seulement du postulat : *deux droites ne peuvent enclore un espace*, comme l'affirme M. Barbarin, mais de ce postulat combiné avec ceux qui font de la droite une *ligne ouverte*.

On doit rechercher la raison pour laquelle la Géométrie elliptique paraît être négligée ou inconnue dans la difficulté que le plan elliptique présente à la représentation intuitive.

Celui-ci, contrairement à ce qui arrive pour le plan euclidien et pour les deux autres non-euclidiens, n'est pas brisé par ses droites en deux feuillets et l'on ne peut y distinguer deux faces. Le plan elliptique ne possède donc pas les caractères des surfaces *simplement connexes* et *bilatères*, que l'intuition sépare difficilement de la représentation concrète du plan.

Une forme géométrique qui réalise la connexion et les propriétés graphiques du plan elliptique, c'est *l'étoile de droites* de la Géométrie projective, tandis que *l'étoile de rayons* (1) de la Géométrie élémentaire répond aux caractères du plan de Riemann. La considération des deux étoiles, l'une à côté de l'autre, éclaircit assez bien le lien qui existe entre le plan elliptique et celui de Riemann (2).

Nous pouvons nous imaginer pour cela deux étoiles, l'une de droites, l'autre de rayons, ayant le même centre. Il est clair qu'à toute droite de la première correspondent deux rayons de la seconde, que toute figure appartenant à la première est formée de deux figures symétriques de la seconde et que, sous certaines restrictions, les propriétés métriques des deux formes sont les

(1) Nous appelons rayon la demi-droite.

(2) Nous avons conservé ici le nom *plan de Riemann* au plan dont parle M. Barbarin. Mais ce nom peut convenir également au plan elliptique. Riemann, dans son mémoire, fait de la géométrie infinitésimale, ou mieux de la géométrie dans un domaine limité. Il parle, en passant, de l'espace complet dans sa nouvelle géométrie, mais nous ne savons pas comment il a conçu cet espace par rapport à sa connexion. Il vaudrait mieux appeler *géométries riemanniennes* les deux géométries compatibles avec l'hypothèse de l'angle obtus et les distinguer l'une de l'autre par les adjectifs *elliptique* et *doublement elliptique*. La Géométrie que M. Barbarin et d'autres appellent Géométrie de Riemann, serait dite *Géométrie doublement elliptique*. (Cfr. KLEIN. *Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie*. 1893.)

mêmes. De telle sorte que, si l'on s'accorde à regarder deux rayons opposés de l'étoile de rayons comme formant un seul élément, elle s'identifie avec l'étoile elliptique.

Les mêmes considérations étant valables pour les deux plans elliptiques et de Riemann, cela nous montre que le premier d'entre eux, à côté de l'autre, doit être conçu comme *plan double.* La *courbe de rebroussement* du plan double sera reconnue facilement pour une conique imaginaire.

4. — L'autre voie qui permet de résoudre le problème des fondements est la voie de Riemann, qui limite l'étude des propriétés géométriques de l'espace à la région finie, accessible aux vérifications expérimentales.

A une telle méthode se rattache le principe de la région normale, employé par M. Barbarin dans son exposé.

Dans la région normale sont valables, sans exception les postulats ordinaires de détermination, d'ordre, de congruence ou de mouvement, et, en général, toutes les propositions indépendantes du principe des parallèles, qu'on peut démontrer dans une portion limitée et simplement connexe de plan euclidien.

Après la discussion des trois cas auxquels donne lieu le quadrilatère de Saccheri et après avoir complété l'étude des propriétés les plus notables de la région normale dans les trois hypothèses de l'angle droit, de l'angle aigu, de l'angle obtus, se présente naturellement le passage de la région normale à la forme complète à laquelle elle appartient.

Guidé par l'intuition, on est conduit à admettre que, autour de chaque point de la forme, il est possible de circonscrire une région normale, où sont valables les propriétés de la région primitive. *Cela s'appelle affirmer l'homogénéité de la forme.*

Alors, dans le cas où le quadrilatère de Saccheri aurait ses deux derniers angles droits, *le problème est ramené à la recherche de toutes les formes possibles à deux dimensions, dont les régions normales jouissent de toutes les propriétés appartenant à une région limitée de plan euclidien.*

Le plan d'Euclide fournit une solution, mais non la seule. Le cylindre ordinaire et une certaine quadrique réglée de l'espace elliptique [1] répondent aux mêmes conditions requises.

Le même problème, dans le cas où serait valable dans la région normale l'hypothèse de l'angle obtus, admet une solution plus simple, parce que, comme l'a démontré KILLING [2], il n'y a que le plan elliptique et le plan de Riemann qui soient compatibles avec le principe de la région normale.

Finalement, dans le troisième cas, où l'on admet l'hypothèse de l'angle aigu, les choses se compliquent.

En plus du plan de Lobatscheffskij, diverses catégories de formes se présentent, répondant toutes aux deux principes rappelés ci-dessus : leur détermination se relie à l'une des plus brillantes théories modernes : *la théorie des fonctions automorphes* [3].

Ces quelques considérations sur les nouvelles formes spatiales, connues sous le nom de *formes de Clifford-Klein*, montrent clairement la non-équivalence des deux méthodes ébauchées ici pour la construction de la Géométrie plane.

Si l'on veut écarter les formes de Clifford-Klein, il est nécessaire d'introduire un nouveau postulat, que l'on découvre facilement en comparant entre eux le plan euclidien et le cylindre. En effet, sur le plan euclidien, le principe de détermination de la droite, postulé pour la région normale, s'étend à toute la forme sans exception ; sur le cylindre, au contraire, deux points d'une même génératrice appartiennent à autant de droites (géodésiques) que l'on veut.

En postulant donc, en plus des lois de la région normale et d'homogénéité, que le principe de la détermination de la droite, d'abord attribué à la région normale, est valable sur la forme

---

(1) La quadrique en question fut découverte par CLIFFORD (Cfr. *Preliminary Sketch on Biquaternions*; *Lond. M. S. Proc.*, IV, p. 381-395). On peut l'engendrer, dans l'espace elliptique, par la rotation d'une droite autour d'un axe gauche, ou encore par la rotation d'un cercle autour de la polaire du centre. Par rapport à la mobilité sur elle-même, elle se présente avec les caractères du cylindre de révolution, et par rapport à la connexion, avec ceux de la surface annulaire du tore.

(2) Cfr. KILLING. *Ueber zwei Raumformen mit constanter positiver Krümmung*. Crelle, LXXXVI, p. 72-83. — Ueber die *Clifford-Klein'schen Raumformen*. Math. ann. XXXIX.

(3) Le lecteur qui désire quelques renseignements plus amples sur cette question, peut lire les ouvrages suivants : KLEIN. *Zur Nicht-Euklidische Geometrie*; Math. Ann., XXXVII, p. 544-572. — KILLING. *Einführung in die Grundlagen der Geometrie*. Bd. I.

complète, *on exclurera les formes de Clifford-Klein et, en outre, le plan de Riemann.*

Les seules formes compatibles avec le nouveau postulat sont donc :

a) Le plan euclidien ou parabolique ;

b) Le plan de Lobatscheffskij-Bolyai ou hyperbolique ;

c) Le plan de Cayley ou elliptique.

Et le plan de Riemann ?... Pour celui-ci, l'existence des points opposés, par lesquels passent des droites en nombre infini, contribue à rendre la forme peu apte à représenter le concept intuitif du plan ; néanmoins, la possibilité de glisser comme les autres sur lui-même par un groupe de ∞^3 transformations congruentes, conduit à le considérer en même temps que les précédents.

Le système de postulats qui conviennent aux quatre géométries en question peut être résumé ainsi :

a) *Principe de la région normale.* — Il existe une région limitée, simplement connexe, dans laquelle sont valables les postulats de détermination, d'ordre, de congruence, etc.

b) *Principe d'homogénéité.* — Autour de chaque point il est possible de délimiter une région normale.

c) *Principe du déplacement généralisé.* — A tout déplacement de la région normale est coordonné un déplacement de la forme complète, qui transforme toute figure en une autre congruente [1].

Il est manifeste que les quatre géométries en question vérifient le système de postulats *a*), *b*), *c*) ; la réciproque, à savoir qu'il n'existe pas d'autres géométries compatibles avec lesdits postulats, a été démontrée par Killing (Cfr. ouvrages cités).

5. — Revenant au livre de M. Barbarin, il est clair qu'en se proposant de ne pas préjuger l'existence possible de couples de points ne déterminant pas la droite et d'utiliser le concept de région normale, l'auteur devait mieux coordonner et mettre en relief les divers postulats, réunis par nous dans les principes *a*) *b*), *c*).

---

[1] Le principe *c*) pourrait être remplacé par un postulat qui semble plus général : *Toutes les droites sont congruentes.* Interprété physiquement, ce dernier exprime *l'isotropie de l'espace.*

Le principe de la région normale réunit l'ensemble des propositions élémentaires susceptibles d'une vérification expérimentale, les deux autres, au contraire, n'expriment pas de résultats que l'expérience puisse confirmer : ils expriment plutôt une extension que l'intellect donne aux résultats des expériences effectuées dans la région normale.

Nous ajouterons que la solution proposée à la fin du numéro précédent s'adapte bien à l'empirisme que professe l'auteur lorsqu'il parle de la forme géométrique de l'univers (Cfr., ch. VIII).

L'expérience seule, dit-il, devra indiquer la forme réelle de notre espace : les inexactitudes auxquelles sont sujettes toutes les vérifications empiriques ne permettent pourtant pas une réponse absolue. L'espace par suite pourra être euclidien ou non, pourvu que, dans ce dernier cas, le paramètre (inverse de la courbure de Riemann) soit très grand.

Le choix du concept euclidien pour représenter l'espace physique, ne s'imposerait donc qu'en vertu du *criterium d'économie.*

Ici se présente spontanément la question psychologique d'expliquer le *sentiment de nécessité* qui accompagne la formation des concepts géométriques, sentiment qui se justifie mal dans un ordre d'idées purement empirique, où les connaissances dues à l'expérience semblent susceptibles de modes divers de détermination.

Comment se fait-il donc que, tandis que plusieurs géométries physiques nous apparaissent logiquement possibles et compatibles, notre intuition demeure enfermée dans une forme fixe euclidienne ?...

La question a été résolue par Kant, qui considère l'intuition spatiale comme étant imposée *à priori* à la structure mentale de tout sujet, et qui dénie toute réalité à l'espace. Mais cette dernière affirmation est repoussée par l'empirisme, lequel, partant de la réalité objective de l'espace, essaie de reconstruire l'intuition au moyen des sensations !...

Pour diminuer le conflit existant entre la doctrine kantienne et la doctrine empirique, le professeur E. Enriques, de l'Université de Bologne, a proposé une solution qui repose sur ce concept fondamental : *Les concepts* (point, ligne, surface, etc...) *d'où part la Géométrie naissent par association de différents groupes de* *sensations. Ces associations, effectuées suivant la structure logique de la pensée, supposent comme conditions logiques les postulats* (¹).

Bien que de telles conditions, prises objectivement, ne puissent être valables qu'avec une certaine approximation, subjectivement, l'existence des concepts en question, comme objet de la pensée exacte, nécessite la validité rigoureuse des postulats.

Février 1903.

ROBERTO BONOLA (Pavie).

(Traduit de l'italien par M. Combebiac.)

(¹) Cfr. ENRIQUES. *Sulla spiegazione psicologica dei postulati della Geometria.* Rivista Filosofica, 1901.