Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 5 (1903)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES APPLICATIONS DU CALCUL DES PROBABILITÉS A LA MÉTHODE SCIENTIFIQUE

Autor: Piéron, H.

Kapitel: Chapitre IV.— Les applications scientifiques du calcul des probabilités.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-6622

En fin de compte, on peut admettre que le calcul des probabilités a une valeur au point de vue de l'avenir pour un grand nombre d'épreuves, mais seulement si l'on accorde à ce calcul une portée *a priori* dépassant les limites d'une expérience fondamentale qui n'a d'ailleurs jamais été systématiquement faite ; cette valeur restera cependant toujours approximative, car, pour que l'application de la formule Stirling dans les calculs soit à peu près exacte, il faut des nombres d'épreuves très considérables, et pour des nombres d'épreuves très considérables, on a des écarts probables de plus en plus considérables eux aussi, au point de pouvoir dépasser tout nombre donné. Pour un nombre infini d'épreuves, l'écart absolu atteindrait lui-même une valeur infinie d'un infini d'ordre inférieur, mais irréductible à toute mesure, à tout chiffre fini.

On voit donc que cette valeur du calcul des probabilités, ainsi limitée dans tous les sens d'aussi stricte façon, peut être considérée comme à peu près négligeable.

Chapitre IV. — *Les applications scientifiques du calcul des probabilités.*

La probabilité des causes. — Les applications en Psychologie; exemples. — Calcul de probabilité et télépathie; exemples. — Applications dans les Sciences Physiques; exemples.— Les applications en Anthropologie; exemples. — Les applications en médecine. — Les applications dans les sciences sociales. — Les applications réelles sont beaucoup plus rares qu'on ne pourrait le croire.

On a fait des applications scientifiques du calcul des probabilités. Nous allons tâcher de donner une idée des principales, très rapidement, et tout d'abord la probabilité des causes.

On trouverait dans Bertrand de nombreuses applications de ce genre, émanant en général de probabilistes qui s'en servaient comme d'illustrations de leurs théories et proposaient des problèmes pour familiariser avec les formules. Mais ce ne sont pas des applications méthodiques.

C'est surtout en psychologie, à notre connaissance, que ces applications ont prétendu se faire.

On a même affirmé la nécessité de se servir du calcul dans cette science. Laplace disait déjà que c'était dans les sciences les plus complexes, où l'investigation est le plus difficile, que l'application du calcul était le plus nécessaire.

« On ne peut pas faire un pas dans la psychologie expérimentale, dit M. V. Henry, sans avoir recours aux principes du calcul des probabilités » (1).

Et l'auteur, après avoir exposé les principes généraux du calcul ainsi que le théorème de Bernoulli, en s'inspirant de très près de Bertrand (cela est tellement apparent que M. V. Henry n'a même pas cru utile de le citer) donne les formules de probabilité d'un écart, mettant en première ligne l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} e^{-\frac{h^2}{2mpq}}$$

dont nous contestons l'exactitude pratique.

Puis il donne quelques exemples dans lesquels il fait le calcul par la formule $1 - \Theta(t)$.

En particulier, en présentant à un sujet des lettres (voyelles) qu'il ne voit pas consciemment, sur 120 expériences pour chaque série, on cherche combien de fois le sujet, qui doit dire une lettre au hasard, tombe juste suivant que les lettres ont une grandeur plus ou moins élevée. On cherche le nombre probable de coïncidences, et la probabilité de l'écart $\Theta(t)$; on a par l'inverse de la probabilité de l'écart, la probabilité d'une cause.

L'écart maximum obtenu est de 43 (nombre probable : 20 nombre réel : 63). Or pour un écart de 17, la probabilité de l'écart n'est déjà que de 3 p. 100 000.

Mais avant qu'on ait ainsi revendiqué dans la méthode une place à de tels calculs, des applications avaient été déjà faites. C'est par un procédé de ce genre que M. Richet a prétendu prouver la réalité de la suggestion mentale. Il faisait deviner au sujet, qui devait parler au hasard, le nom d'une carte connue par une personne. Il comparait le nombre de coïncidences réelles au nombre de coïncidences probables. Et alors prenant la différence,

---

(1) V. Henry. Le Calcul des Probabilités en Psychologie. *Année Psychologique* 2e année (1895), 1896, p. 466.

l'écart, et le rapportant au nombre des sorties probables, M. Richet l'érigeait en probabilité d'une cause qu'il déclarait être la suggestion.

Voici un cas par exemple :

Sur 840 tirages, le sujet tombe 250 fois sur la couleur de la carte. Le nombre de sorties probables était de 203, dit M. Richet. La probabilité était de $\frac{13}{52}$, contre $\frac{39}{52}$, c'est-à-dire de $\frac{1}{4}$ (Ce nombre de sorties probables aurait donc dû être de 210). J'ai un écart, dit M. Richet, de 52, 52 est le quart de 208, donc la probabilité pour l'existence de la suggestion est de $\frac{1}{4}$.

L'application du calcul des probabilités, est ici tout à fait mauvaise. Il fallait faire appel à la formule de la probabilité de l'écart $1 - \Theta\ (t)$.

Faisons appel à cette formule.

On a

$$t = \frac{h}{\sqrt{2\pi mpq}}, \quad pq = 0{,}19,$$
$$\sqrt{2\pi \times 840 \times 0{,}19} = 32\,;$$

50 est l'écart exact (840 — 810)

$$\frac{56}{32} = 1{,}56,$$
$$\Theta\ (1{,}56) = 0{,}9726.$$

La probabilité de la cause n'est plus d'un quart, mais de 97 p. 100.

On voit que l'application de la formule, n'est pas négligeable. Elle serait ici tout à fait favorable au calcul de M. Richet.

Il y a des cas où il n'en serait pas ainsi.

Il y aurait lieu en particulier d'appliquer ces formules exactes, au calcul des probabilités à toutes ces études et enquêtes que l'on fait à l'heure actuelle sur les phénomènes anormaux, hallucinations télépathiques et autres et qui jouent constamment du calcul des probabilités (¹).

(¹) Cf in *Procedings of Society for Psychical Research*, t. VI, 1889.
Ch. Richet. *Further experiments in hypnotic lucidity or clairvoyance*, p. 16-67, 72-75, 82.

D'après l'enquête de la Société des recherches psychiques de Londres, on arrive pour la question des hallucinations à des résultats tels que ceux triomphalement exposés par M. Flammarion (1) par l'intermédiaire de M. Dariex :

On n'a relevé qu'une hallucination visuelle sur 248 personnes. Soit pour la probabilité d'un tel cas : $\frac{1}{248}$.

La probabilité de mort pour un adulte d'âge indéterminé dans une période de 24 heures est de

$$\frac{22}{1000}\,\frac{1}{365}$$

$$\frac{1}{248}\,\frac{22}{1000}\,\frac{1}{365} = \frac{1}{4.114.545}.$$

Et l'on conclut que l'hypothèse d'une action télépathique réelle est 4 114 545 fois plus probable que l'hypothèse d'une coïncidence fortuite. Voilà une interprétation de résultats qui ne se soucie guère des règles les plus élémentaires du calcul des probabilités.

Mais voici qui est mieux encore.

M. Flammarion extrait des *Phantasms of the Living* un cas précis et qu'il décrit longuement, puis il applique le calcul des probabilités.

Il n'y a pas eu un intervalle de plus de 12 minutes entre l'hallucination et la mort, période contenue 120 fois dans 24 heures soit $\frac{1}{120}$.

Il s'agissait d'un homme de 48 ans.

La probabilité officielle de la mort est alors de

$$\frac{13,5}{1000}.$$

L'on a donc

$$x = \frac{1}{248}\,\frac{13,5}{1000}\,\frac{1}{365}\,\frac{1}{120} = \frac{1}{804.622.222}$$

H. Sidgwick. *Experiments in thought transference*, p. 128.

Myeas. *Das Doppel-ich*, p. 109, 110.

L. Taylor. *Experimental Comparison bethween chance in Correspondance of diagrams*, p. 398, 401, 405, t. III, 1885, p. 190, 200; t. IV, 1886-1887, p. 189, 208.

Ed. Gewatt. *The Calculus of Probabilitie applied to psychical Research.*

Raphael Chandos. *Revue des Deux Mondes*, 1887, p. 211.

(1) C. Flammarion. *L'Inconnu et les Problèmes Psychiques.* Ch. IV, note p. 239-241.

et la probabilité pour l'existence de l'action télépathique devient de 804 622 222. On ne pourra pas dire que notre remarque, que nous avons souvent répétée était inutile, à savoir que le calcul des probabilités n'était applicable qu'aux grands nombres ; qu'il réclame des grands nombres d'épreuves, et ne se contente pas de ceux dont on surcharge ses conclusions. Or ici, il y a une épreuve et une seule. Supposons un milliard de boules différentes dans une urne. Nous en tirons une particulière. La probabilité pour que nous tirions cette boule par hasard était $\frac{1}{1\,000\,000\,000}$. Nous allons conclure qu'il y a un milliard à parier contre un pour l'existence d'une cause à laquelle nous attribuerons tel nom plus ou moins surnaturel que nous voudrons, cause qui a produit le tirage de cette boule. Notre raisonnement vaudra celui de M. Flammarion, et nous pourrons monter plus loin dans les zéros accumulés.

Vraiment il est permis de s'amuser, mais il faut être bien naïf pour prendre pareilles choses au sérieux.

Laissons donc tous les calculs du même genre, et revenons aux applications plus sérieuses.

C'est la probabilité des erreurs qui est le plus souvent employée dans les diverses sciences.

L'astronomie sur laquelle, faute de compétence, nous ne nous permettrons pas d'insister, fait constamment appel à la théorie des erreurs et des poids pour caractériser les observations. Cette science d'observation, si proche des mathématiques pures, devait être tentée de mathématiser en quelque sorte l'observation elle-même, de déchiffrer les phénomènes subjectifs perturbateurs. A côté de la mesure excellente de l'équation personnelle, elle a encore fait appel à la probabilité des erreurs variables, qui ne peuvent être soumises à une formule d'observation, étant inconstantes par nature. On ne manque jamais, en rapportant des observations faites, de donner leur précision et leur poids.

Il n'y a guère d'application de ce genre dans les sciences physico-chimiques.

Cependant il ne faudrait pas croire qu'elles en sont véritablement exclues. Pour les parties les moins précises de ces sciences, on fait parfois appel aux probabilités, et Terquem et Damien (1) dans leur traité de Physique expérimentale consacrent une partie de leur introduction concernant la méthode à la théorie de la probabilité des erreurs.

Se fondant sur la théorie, telle qu'ils l'ont exposée, M. Paillot (2), élève de M. Damien, dans une thèse récente de l'Université de Lille, en recherchant les forces électromotrices d'aimantation, appelé à mesurer le diamètre des bobines employées, a tenu compte des erreurs relatives à la moyenne, en prenant les carrés des différences.

Il obtenait ainsi la somme de ces carrés $\sum e^2$ et il en tirait l'erreur probable du résultat par la formule

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\Sigma e^2}{m(m-1)}}.$$

Cette erreur s'est toujours trouvée chez lui de l'ordre des dix millièmes.

Ce qui prouvait qu'on ne pouvait, dans ses évaluations, pousser l'approximation au delà du quatrième ordre des unités décimales.

Le calcul des probabilités n'a été employé chez cet auteur que pour cette évaluation du diamètre des bobines ; il s'en est dispensé dans beaucoup d'autres et, en effet, on peut dire que dans les sciences physiques, le calcul des probabilités est l'exception.

En revanche, pour des sciences de mesures plus complexes, telle que l'anthropologie, nous retrouvons ces applications plus nombreuses (3).

(1) TERQUEM et DAMIEN. *Physique expérimentale*, in-8, 1888, Introduction, ch. II, p. 66-105.

(2) PAILLOT. *Recherches sur les forces électromotrices d'aimantation*, in-8, 1901. Lille, p. 23-52.

(3) De nombreuses applications ont été faites dans les sciences naturelles, rares parce que la mesure elle-même y est rare. Des courbes théoriques ont été faites, par exemple pour les variations des types en botanique afin de les comparer aux courbes réelles, exactement comme en anthropologie pour les variations des types considérés comme tels.

Cf. AMANN. Application du calcul des probabilités à l'étude de la variation d'un type végétal. *Bull. herb. Boissier*. 1896, Ch. IV, p. 577-590.

C'est Quételet qui, le premier, a tenté des applications effectives de la théorie des erreurs aux mensurations anthropologiques. Il extrait par exemple du treizième volume de l'*Edinburgh medical journal* les résultats de la mensuration des circonférences des poitrines de 5 738 soldats écossais. Le calcul de l'erreur probable permit à Quetelet de conclure qu'il pouvait parier un contre un qu'une personne peu exercée se tromperait de 33 millimètres (1 pouce) en mesurant une poitrine de plus de 1 mètre (40 pouces) de circonférence. Et alors 5 738 mesures prises sur une seule personne se grouperaient avec la même régularité que les 5 738 mesures prises sur les soldats écossais. Quételet passe de l'écart réel à l'erreur probable. Nous reviendrons sur ce point. Herschell [1], en faisant les mêmes calculs, ne trouva pas les mêmes résultats.

On sait que c'est Quételet [2] qui mit en honneur la conception de l'*homme moyen*, un peu ridiculisée, depuis lors. Il se livra en effet à la statistique et aux moyennes avec ardeur, voulant que pas un domaine social n'échappât à la mesure avec comme criterium la théorie des probabilités.

Il fut en effet tout à fait enthousiasmé par ce calcul qu'il déclarait déjà très insuffisamment appliqué. « Le calcul des probabilités, dit-il, n'est que l'instrument qui doit servir à régulariser les travaux d'exploitation ; mais il devient indispensable dans les recherches auxquelles nous voulons nous livrer. Il sert en effet à distribuer avec avantage la série de nos observations, à continuer la valeur des documents dont nous faisons usage, à les continuer ensuite de manière qu'ils s'écartent le moins possible de la vérité, et à calculer, en définitive, le degré de confiance qu'on peut attacher aux résultats obtenus [3]. »

Depuis, des applications nouvelles se sont faites, avec un oubli fréquent des essais de Quételet.

Ed. Goldstein a publié en 1883 une étude sur les applications du calcul des probabilités à l'anthropologie [4], ne faisant guère

---

(1) HERSCHELL. Sur la théorie des probabilités et ses applications aux sciences physiques et sociales. *Revue d'Edimbourg*, 2 juillet 1890.

(2) QUÉTELET. *Physique sociale*, in-8, 1869. T. I.

(3) QUÉTELET, *id.*, p. 137.

(4) Édouard GOLDSTEIN. *Revue d'Anthropologie*. 2e série, XI, 1883, p. 704-718.

que résumer un travail allemand de Stieda [1]. Il s'occupe surtout de la sériation dans les moyennes qui lui paraît nécessaire, car on fait parfois des moyennes avec des éléments hétérogènes. Mais comment mesurer cette hétérogénéité. Il fait appel à la théorie des erreurs qu'il expose d'abord en général, donnant les formules de mesure de l'erreur probable.

La somme des erreurs résiduelles $\sum \delta$ est la somme des écarts d par rapport à la moyenne, les écarts représentant pour lui les erreurs, la variation moyenne. Il donne le tableau très complet de Wuich. Il définit le poids, la précision, etc., et applique comme exemple seulement, ces formules à des mesures anthropologiques comparatives sur des juifs autrichiens. Il indique que, pour les moyennes, il y aurait lieu de comparer deux courbes ainsi définies.

On fait une courbe du nombre de fois que chaque mesure a été rencontrée, à partir de la plus faible.

Puis, la moyenne étant déterminée, on cherche combien de fois, sur un nombre égal d'épreuves, chaque mesure devait arriver d'après le calcul des probabilités fondé sur l'erreur probable : la probabilité est relative, d'après le tableau de Wuich, au multiple de l'erreur probable, qui est ici l'écart par rapport à la moyenne, soit une valeur égale à deux fois l'erreur probable, qui s'écarte de la moyenne du double de l'écart probable, je trouve comme probabilité de cet écart 82,3 p. 100 ; donc sur 100 cas, il ne devra y en avoir que 17,7 qui atteindront ou dépasseront cet écart. Je détermine un point de la courbe probable. Je chercherai le point de la courbe réelle, qui pourra être de 20 par exemple, et je comparerai les deux courbes.

Quand les deux courbes diffèrent beaucoup, je dois dire que d'autres éléments que des erreurs sont venus troubler mes moyennes, et par conséquent que mes éléments mesurés ont des différences réelles qui ne permettent pas de les comparer, qu'il faut donc les ranger dans des séries, dans des moyennes différentes. Je mets en lumière l'hétérogénéité de ma moyenne, et je n'ai

(1) Dr Ludwig STIEDA. Ueber die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der anthropologischen Statistik. *Archiv für Anthropologie*, 1888, t. 14.

plus qu'à la diviser en séries homogènes, représentant des types anthropologiques : il ne doit pas y avoir entre des types de cette espèce des écarts dépassant notablement l'indice probable d'oscillation, l'erreur probable.

Une application pratique du calcul des probabilités a été faite tout récemment par M. Binet en anthropologie (1).

Ayant pris des mensurations craniennes dans deux groupes d'enfants, l'un d'intelligents, l'autre d'inintelligents, il fit les moyennes, et trouva des différences entre ces moyennes considérées *a priori* comme homogènes (M. Binet n'a pas fait la courbe de Stieda et Goldstein).

En particulier, il applique la formule de probabilité d'un écart de moyennes aux moyennes du diamètre frontal :

« Etant donné, dit-il, la différence d'une mesure que présentent deux groupes de sujets, il est possible de savoir si cette différence moyenne résulte des écarts opératoires de mensuration ou résulte des dimensions réelles qui ont été mesurées.

On voit que la question est d'une importance capitale. La formule à employer est la suivante :

$$T = \frac{n_1 \sqrt{n.d.v}}{n v_1^2 + n_1 v^2}. \text{ »}$$

Appliquée au diamètre frontal, cette mesure lui donne à ce qu'il rapporte, une probabilité de 80 p. 100 pour que la différence provienne d'autre chose que des erreurs opératoires, 20 p. 100 pour qu'elle soit due à ces simples erreurs opératoires.

Pour le détail de la formule, M. Binet renvoyait à un second article de V. Henry (2) qui traitait cette fois de la théorie des moyennes et des erreurs, et qui s'attachait surtout à la probabilité de l'écart entre deux moyennes, plutôt qu'à l'écart interne, pourrait-on dire, relatif à la moyenne. C'est en effet un problème qui s'ajoute à celui de Stieda : Quand on a constitué des moyennes homogènes d'où l'on a exclu toute hétérogénéité trop forte,

---

(1) BINET. Mensuration de la tête vivante. *An. Psych.* 7e Ann. 1901, p. 359, 360.

(2) V. HENRY. Quelques applications du Calcul des Probabilités en Psychologie. *An. Psych.* 2e année (1898), 1899, p. 153-160.

comment reconnaître maintenant le degré d'hétérogénéité de deux moyennes prises dans leur ensemble et qu'on considère par avance comme hétérogènes ; le sont-elles vraiment au point de constituer deux moyennes distinctes, et de ne pouvoir se fondre en une seule, de représenter enfin deux types différents. Tout d'abord il fallait amener l'unité interne dans les types. Maintenant il faut juger de la dualité externe de ces types.

La première application servait à déceler une hétérogénéité dans la moyenne ; la deuxième sert à déceler une homogénéité de deux moyennes.

C'est dans les temps de réaction surtout que se présente cette question en psychologie : on élimine arbitrairement et sans appel en général au calcul des probabilités, toute mesure qui s'écarte isolément par trop de la moyenne, sans qu'il y ait de règle de cette élimination, autre qu'une appréciation subjective, et le type étant ainsi constitué dans une moyenne, on veut le comparer à une autre moyenne, soit d'un autre sujet, soit d'un autre état du même sujet. A quel moment la différence entre ces moyennes sera-t-elle significative de la spécificité de ces types, de la réalité des différences objectives ? C'est à cela que doit répondre la série des probabilités des erreurs dans les moyennes.

E.-W. Scripture (1) a consacré un article au même sujet, faisant, lui aussi, la théorie des applications du calcul, mais non des applications proprement pratiques. Et c'est surtout aux temps de réaction qu'il songe, ce faisant.

On voit que les applications réelles sont beaucoup plus rares qu'on ne pourrait le croire, étant donnée la vogue du calcul des probabilités qu'on cite à tout propos, et auquel on fait constamment appel théoriquement. Cette abstention de la pratique est-elle ignorance, est-elle défiance du bon sens vis-à-vis du prestige des chiffres ?

Il est bien certain pourtant que l'on applique couramment, sinon le détail, du moins le principe du calcul des probabilités, dans la vie ordinaire, mais c'est une pratique empirique, et nous

(1) E.-W. Scripture. Computation of a set of simple direct measurement. *Studies from the Yale psychological Laboratory*, vol. VIII, 1900, in-8°. New Haven.

traitons des applications scientifiques du calcul des probabilités. Aussi ne nous sommes-nous pas arrêtés aux applications qu'en font souvent les médecins dans le traitement de certaines maladies, car ils ne recourent à cela que par une ignorance plus ou moins avouée, réalisant pour la vie humaine ce que Laplace rêvait pour la sécurité civique en proposant de juger par probabilités. Eux soignent par les mêmes principes, et les discussions sur l'intervention chirurgicale dans l'appendicite par exemple, roulent le plus souvent sur des probabilités extraites de quelques cas, quand ce n'est pas d'un cas.

Et cette application médicale n'est pas récente. Avant la découverte de la vaccine, on multiplia les considérations probabilistes sur les dangers et les avantages de l'inoculation, toujours en considérant des hommes « moyens » comme Bertrand le relève ironiquement, des hommes-types, des hommes en soi; D'Alembert (1) en a fait aussi la remarque très judicieuse.

Enfin les compagnies d'assurances tiennent un grand compte des probabilités fournies par les statistiques; elles opèrent d'ailleurs sur des grands nombres et vivent de la constance assez régulière de la nature, que les probabilités attribuent à la puissance « Hasard » alors que, dans la monotonie universelle, il est plus simple d'admettre que les mêmes causes produisent toujours les mêmes effets. Aussi les résultats assez heureux des compagnies d'assurance ne peuvent guère se reporter sur le calcul des probabilités, d'autant qu'on ne fait appel qu'aux probabilités simples et non aux formules compliquées du calcul.

(*A suivre.*)

N. Vaschide (Paris). H. Piéron (Paris).

(1) D'Alembert, *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie. 4e éd.* Amsterdam, 1770, in-12. — *Réflexions philosophiques et mathématiques sur l'application du Calcul des probabilités à l'inoculation*, p. 305-386.