SUR LA NECESSITE DU POSTULAT D'EUCLIDE

Autor(en): **de Pesloüan, C. Lucas**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-6634

SUR LA NECESSITE DU POSTULAT D'EUCLIDE

La question du « postulat d'Euclide » semblait élucidée il y a vingt ans ; l'acceptation totale des idées kantiennes, la considération de l'espace comme notion *à priori* fournissait une explication complète. Il est même étonnant que, dès cette époque, quelque philosophe n'ait point exprimé cette idée si forte que formula depuis M. Poincaré : « Il n'y a que des géométries plus ou moins commodes. »

Depuis quelques années, par suite, peut-être, d'un certain retour à l'impressionnisme, les polémiques ont repris ; il se trouve encore des géomètres — si on peut donner ce nom à tous ceux qui s'occupent de géométrie — qui veulent, sinon démontrer le postulat de la parallèle unique, tout au moins lui trouver une réalité physique. Leur sentiment est-il absurde ? je ne crois pas, et la réponse qui consiste à leur montrer la représentation spatiale physique comme possible dans un système géométrique quelconque est peut-être un peu simpliste. Cet argument ne les satisfera pas parce que, malgré tout, ils rapprocheront l'image de la nature, et que quelque chose les choquera qui sera pour eux peut-être mal défini et à quoi l'on ne saura répondre. Ils défendront leur sentiment, en quoi il est possible qu'ils aient raison, mais par des arguments en général peu satisfaisants.

Cherchons quel est le point où ils pèchent.

Le géomètre crée ses postulats par l'observation de certains éléments fixes ou coordonnés dans l'espace où il agit. Il étend ces propriétés à un espace indéfiniment étendu, et leur donne ainsi la forme géométrique ; puis il les développe par combinaison, induction et syllogisme et crée ainsi une science qu'il applique à l'espace physique. C'est là l'emploi rationnel d'un mode de correspondance bien défini, et l'usage de toute science.

Mais ce qu'on doit se garder de faire, c'est après avoir appliqué cette géométrie à l'espace, de vouloir faire rentrer l'espace dans cette géométrie, et de ne lui point voir d'existence en dehors. C'est là une des erreurs fréquentes chez les géomètres. Je leur dirai en passant qu'ils ne sont point seuls à la faire; il nous arrive souvent de prendre nos représentations pour des réalités : je lis cette phrase d'un géomètre : « Nous ne pouvons imaginer une courbe sans tangente ». Avons-nous donc à le faire ? S'il existe des fonctions ne présentant point de dérivées, il est probable que ces fonctions ne sont point représentables par une courbe graphique ou que la tangente a de telles courbes si elle existe, n'est point représentable par la dérivée. De même, une géométrie doit-elle représenter tout l'espace ? Elle a été créée sur un nombre fini de postulats ; la réalité n'a aucune raison de n'en point demander un nombre indéfini. Pourtant, parmi ces représentations géométriques, il en est qui nous représentent plus ou moins bien les objets extérieurs ; en somme, il y a une géométrie sinon *plus vraie*, tout au moins *plus satisfaisante*. Est-ce éducation, atavisme..... ? il se trouve que cette géométrie est celle d'Euclide.

Personne n'oserait dire pourtant que le postulat de la parallèle ait une réalité ; ni que cette géométrie soit plus simple puisque la simplicité n'est point sur ce point définie. Mais on peut dire qu'elle conduit à des résultats bien en rapport avec les phénomènes de l'espace ambiant, cela pour la majorité des intelligences.

Chaque géomètre pourrait former sa géométrie : partant de certains postulats, la développer jusqu'à un certain résultat qui le surprenne ; particulariser alors ce résultat s'il trouve ainsi satisfaction et en former un postulat ou bien transformer une des notions antérieurement admises. On pourrait dans ce sens développer le beau mémoire de M. de Tilly fondé sur la notion de distance ; cette méthode suivrait peu le développement didactique d'Euclide, c'est pourquoi j'en proposerai une autre.

Nous aurions pour premier objet de créer sur une surface une ligne géométrique susceptible de mesure, ligne que nous nommerons droite. On devra alors satisfaire aux 3 postulats suivants :

1° Le plan est superposable à lui-même par glissements; 2° La droite est définie par un point de départ et un point d'arrivée; 3° La droite est superposable à elle-même par glissements.

De ces trois postulats découlerait la mesure de la droite, puis la définition et la mesure de l'angle. On verrait ensuite qu'une telle géométrie ne permet pas en général de former deux angles adjacents ayant leurs côtés sur une même droite et égaux, c'est-à-dire ne permet pas l'existence de la perpendiculaire, ce qui nous amènerait alors à créer un quatrième postulat.

4° La droite est superposable à elle-même par rotation dans le plan autour d'un de ses points.

Ayant vérifié que ce postulat ne contenait aucun des précédents, nous continuerons le développement : nous définirons la figure symétrique d'une figure donnée (ce qui nous évitera d'admettre la rotation du plan autour d'une droite) et les relations entre une figure A et la symétrique B' d'une figure B. — Passant alors au quadrilatère trirectangle, nous démontrerons que son angle non droit, aigu ou obtus se conserve pour tout quadrilatère du plan, restant positif en diminuant quand les côtés augmentent s'il est aigu, augmentant et toujours inférieur à 3 droits s'il est obtus.

Nous admettrons alors la notion d'aire ; nous ne pouvons en général mesurer une aire sans passer par des notions infinitésimales, mais nous pouvons connaître l'aire d'un triangle en fonction des angles ; si cette fonction est linéaire, nous aurons mesuré l'aire. Toute la mesure de l'aire est basée sur ce lemme : deux quadrilatères trirectangles qui ont l'angle non droit et un côté adjacent égaux chacun à chacun sont superposables.

Ce lemme n'est point vrai si les quatre angles sont droits. On démontre pour le cas de l'angle aigu ou obtus que l'aire du quadrilatère trirectangle d'angle non droit égal à A est mesurée par K (1 — A). Il en résulte donc dans les deux cas que l'aire totale du plan est finie. C'est là un résultat qui présenté ainsi brusquement surprend; si on ne peut point l'admettre, on se trouve amené à faire de la géométrie Euclidienne. La géométrie dans l'espace ne demandera que l'admission du postulat de libre mouvement.

Ce qui a été fait a consisté en somme à remplacer le postulat de la parallèle unique par un autre d'allure plus intuitive. On eut pu choisir une marche différente et admettre comme nécessaire la similitude. Le fait de pouvoir construire une image réduite d'une figure semble un fait intuitif. Cette réduction avec rapport de grandeur constant n'est possible que dans le système Euclidien. Il est vrai que l'on peut considérer que cette constance du rapport ne soit pas une condition nécessaire dans la possibilité d'une représentation réduite. Mais on admettra qu'il faut tout au moins que ces rapports ne soient point très écartés les uns des autres. Cela se peut-il dans un système de géométrie générale. Il y a là un problème d'analyse que je n'ai point résolu. Il se pose aisément en considérant les relations de M. de Tilly entre les 10 distances de 5 points dans l'espace, soit $f(a_1, b_1, \ldots) = 0$ cette relation, elle devient $f(\lambda_1\, a_1\, \lambda_2\, b_1 \ldots) = 0$. Se peut-il que quelle que soit la valeur des λ on n'ait jamais par exemple $\lambda_1 = 2\lambda_2$. Il semble bien par les considérations des surfaces sphériques qu'il n'en soit pas ainsi.

Quel que soit d'ailleurs le résultat, les géomètres ne sauraient y voir un argument en faveur du postulat d'Euclide. La question est toute de sentiment. *Il n'y a pas à savoir si l'espace est Euclidien, mais seulement si les esprits le sont.*

Cette forme d'esprit me semble d'ailleurs générale parce qu'elle se lie à la faiblesse de nos organes sensitifs : nous ne percevons par la vue que des espaces très restreints, nous ne voyons point les grandeurs dès qu'elles dépassent un certain ordre, elles n'existent alors que par leur représentation numérique ; les effets de perspective et de coloration ne sauraient tenir lieu d'un chiffre. Au point de vue de leur forme géométrique : ou bien ce sont des éléments qui se reproduisent par addition, et alors nous les transportons en pensée par glissement les uns à la suite des autres. C'est de cette façon que nous imaginons le plan comme infini. Ou bien nous imaginons une représentation des objets par réduction de rapport, jusqu'à les mettre à même d'être perçus par nous. C'est dans ce sens que nous sommes Euclidiens, que seule nous satisfait la géométrie d'Euclide. « Qu'importe, disons-nous, de savoir que les planètes décrivent une ellipse, si nous ne pouvons nous représenter une telle ellipse. »

Tels sont les arguments que devraient donner les défenseurs du postulat d'Euclide ; je ne sais s'ils l'ont fait. Mais ils ont aussi voulu s'appuyer sur l'expérience, et en cela, je crois qu'ils ont absolument tort. On a déjà vu plus haut, de cette opinion, une raison très générale. M. Poincaré en a donné une fort belle à laquelle il faudrait ajouter quelques mots :

Je crois d'abord qu'il peut y avoir confusion sur le sens du mot expérience. Une expérience, dit-on, ne saurait donner un résultat absolu, elle ne fournit qu'une approximation. Ceci n'est point si le résultat cherché est qualitatif. Bessel a fait cette remarque que la définition du plan par la ligne droite n'était pas *a priori* cohérente ; il a donc fallu que l'existence du plan fut expérimentale. Il est vrai que l'expérience est pour ainsi dire intérieure, que l'on n'aurait point l'idée de la matérialiser, parce que tout résultat obtenu physiquement ne saurait changer notre notion, et même en dépendrait probablement. De même, les raisonnements faits tout à l'heure sur les figures symétriques à l'aide des quatre premiers postulats donnaient une géométrie de la sphère. Nous aurions pu les faire en opérant le retournement de cette sphère autour d'un de ses grands cercles. C'est là un procédé qui serait peut-être choquant *a priori* si le maniement des sphères en tissus élastiques ne nous l'avait montré possible [1]. C'est encore là un résultat expérimental tout à fait absolu. Nous pourrions dire que c'est un résultat expérimental *a priori*.

On ne saurait raisonner de même au sujet du postulat d'Euclide (ou du moins de celui que l'on nomme ainsi) parce que, sous quelque forme qu'on le présente, il offre un caractère quantitatif : alors, il est vrai qu'une expérience ne saurait donner un résultat absolu par suite de la nature même de l'expérience. Mais je crois aussi qu'il existe une autre raison, c'est que l'expérience ne saurait donner de résultat. La connaissance qu'elle amènerait au sujet de l'infinité de l'espace, au sujet de sa forme, est trop élevée pour nos esprits. Le fait d'acquérir de telles certitudes de l'extérieur devrait entraîner dans nos idées cosmogoniques une transformation qui ne saurait être aussi brusque. C'est en nous et non en dehors de nous que nous devons trouver la raison d'être de tels faits. Peut-être dira-t-on que cette raison naît d'une métaphysique bien sentimentale. Je n'en disconviendrai pas.

Resterait à traiter une question : le rôle donné aux postulats

---

[1] Il est vrai que la superposition ne se fait pas alors sans déformation. D'ailleurs les raisonnements géométriques ne supposent pas l'*indéformabilité* mais seulement la *superposabilité*. La notion d'indéformable n'entre que dans la représentation graphique du raisonnement.

dans l'enseignement de la géométrie. Nous n'avons point à voir s'il faut enseigner cette science, mais comment on le pourrait faire. Faut-il déplorer cette suite de théorèmes du premier et du deuxième livre, que les enfants savent par cœur? J'ai vu plus tard que, dans la plupart des ouvrages secondaires, ils n'avaient même point l'excuse de la précision. Je me rappelle aussi combien d'enfants révèrent la gloire de transformer en théorème ce « postulatum d'Euclide, que l'on admet sans démonstration », ainsi qu'il était écrit en italique. Cela est fâcheux ; le seul système serait de ramener ces postulats à des notions intuitives sans chercher à les expliciter. Y parviendra-t-on pour le postulat d'Euclide? Je n'ai pu parvenir à le faire, et la méthode employée plus haut serait mauvaise, car le postulat y agit par négation. Telle qu'elle est, je la crois plus satisfaisante que celle qu'on m'enseigna. En dehors de toute transformation, je crois la forme suivante meilleure que celle que l'on donne habituellement : Le postulat suivant : « Le lieu des points équidistants d'une droite est une droite » répond à notre expérience journalière, grossièrement du moins. Je crois qu'il est plus profitable en ce sens de masquer aux enfants les fondements de la science ; tout au moins est-ce aussi honnête que de leur en dire la moitié. Si d'autre part on leur ouvrait l'esprit à la géométrie générale, la notion d'un espace replié sur lui-même ou seulement d'un plan fermé à la façon d'une surface cylindrique leur semblerait tout à fait barroque. Il n'y a pour eux qu'une géométrie vraie.

Dans un cerveau de dix-huit ans les raisons d'agir ainsi disparaissent et je ne juge point mauvais que l'abord des situations dans notre société exige une certaine précision dans les connaissances géométriques. On peut y apprendre au moins à différencier parmi des sensations qui semblent n'avoir pas de lien, celles qui dérivent d'un même principe, c'est là un utile travail d'induction.

Ce qu'il faudrait pouvoir apprendre aussi, ce sont les raisons qui amenèrent Euclide à développer ce seul système. Répondait-il nécessairement à ce sens admirable de beauté et d'équilibre qui, dans l'art, créa une perfection? Quelque Helléniste nous le dira-t-il?

C. Lucas de Pesloüan (Paris).