Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1902)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES IDÉES DE HERTZ SUR LA MÉCANIQUE

Autor: Combebiac, G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5588

LES IDÉES DE HERTZ SUR LA MÉCANIQUE

L'ouvrage posthume de Hertz : « Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt » a donné lieu à la publication d'un certain nombre d'études critiques, sans pour cela avoir fait l'objet d'un exposé quelque peu complet, destiné à ceux qu'intéressent les idées du grand électricien, mais qui pourraient reculer devant la lecture de son œuvre, où le souci de la logique formelle semble avoir accumulé les considérations accessoires, les raisonnements purement formels et stériles, les définitions de termes plus ou moins détournés de leur sens habituel.

Le but que s'est proposé Hertz est de débarrasser la Mécanique des incontestables difficultés que présente la coordination logique des principes de cette science.

Le moyen consiste à établir l'*unité de force*, en émettant l'hypothèse que toutes les forces de la nature ne sont que les manifestations de liaisons géométriques existantes non seulement entre les masses perceptibles à nos sens, mais encore entre celles-ci et des masses latentes (*verborgene*).

Cette hypothèse admise, la Mécanique se trouve réduite à l'étude des systèmes matériels à liaisons et peut être édifiée au moyen d'un principe fondamental unique consistant dans l'énoncé de la loi du mouvement d'un tel système supposé, soustrait à toute influence, c'est-à-dire à toute liaison extérieure.

Pour donner à l'énoncé de cette loi toute la simplicité de forme qui convient à son rôle, Hertz introduit une terminologie assimilant un système matériel à liaisons à un point géométrique astreint à demeurer sur une surface fixe.

L'ouvrage de Hertz comprend trois divisions :

Une introduction consacrée à l'examen critique des principes de la Mécanique ;

Une première partie, dans laquelle est établie la terminologie ;

Une seconde partie, qui constitue un exposé synthétique des propositions connues de la Mécanique sous la forme particulière due à l'hypothèse et à la terminologie mentionnées.

INTRODUCTION

L'*Introduction* a été l'objet d'une étude de M. Poincaré [1], où l'on trouvera, en même temps qu'un exposé des idées de Hertz, une discussion approfondie des principes de la Mécanique, mettant nettement en évidence les difficultés logiques que présente la coordination de ces principes.

Renvoyant à cette étude, nous nous bornerons à signaler brièvement, sans les discuter, les objections faites par Hertz aux deux systèmes proposés jusqu'ici, savoir le *système classique* et le *système énergétique ;* nous exposerons ensuite la conception de Hertz lui-même.

Système classique. — Les reproches qu'adresse Hertz à ce système visent surtout la notion de force.

Tout d'abord un examen un peu attentif de l'exposé habituel des principes de la Mécanique montre que la manière dont cette notion y est établie est loin d'être satisfaisante.

En outre l'introduction de la force dans certaines questions présente quelque chose de factice et donne l'impression de rouages inutiles compliquant inutilement les concepts intuitifs :

Que vient faire notamment la notion de force en Mécanique céleste, où l'observation ne s'applique qu'à des mouvements, tant pour en établir d'abord les lois que pour en vérifier ensuite les déductions dues à l'analyse ?

Un morceau de fer repose sur une table à peu près horizontale, fait qui nous apparaît comme extrêmement simple.

Or, pour se rendre compte, suivant les lois de la Mécanique, de la nécessité de ce repos, on doit faire l'analyse de toutes les forces auxquelles ce morceau de fer peut être soumis, pesanteur, réaction élastique de la table, frottement, forces moléculaires, magnétiques, électriques, etc., afin de constater que, tout compte fait, ces forces s'entre-détruisent.

---

[1] H. Poincaré. *Revue générale des Sciences*, 1897, p. 734.

C'est beaucoup de raisonnement pour expliquer la permanence d'un état en l'absence de toute cause perceptible de perturbation.

Un troisième reproche fait par Hertz à la notion de force vise son ampleur.

Loin d'épuiser la notion de force, telle que nous la trouvons dans la mécanique rationnelle, la nature ne nous présente que des forces soumises à de nombreuses restrictions, telles que d'être décomposables en actions réciproques entre les particules de matière, d'être indépendantes de la valeur absolue du temps et du lieu absolu de l'espace.

D'autres restrictions paraissent encore devoir être admises, sur le choix desquelles on n'est pas absolument fixé.

C'est ainsi qu'on peut se demander si les forces élémentaires consistent uniquement en attractions et répulsions suivant les lignes de liaison entre les masses agissantes, si leur grandeur ne dépend que de la distance de ces masses ou s'il y a lieu de faire intervenir les vitesses absolues ou relatives, ou encore les accélérations et les dérivés d'ordre supérieure de la vitesse.

Enfin les principes de la Mécanique n'expliquent pas la loi de la conservation de l'énergie, que sa généralité semblerait devoir faire reporter de la Physique à la Mécanique.

Il résulte de ces considérations que la Mécanique est trop vaste : elle comprend plus que la nature.

Système énergétique. — Ce système de mécanique s'obtient par la substitution, parmi les notions primordiales, de l'*énergie* à la *force*.

On se trouve de prime abord en présence d'une difficulté, l'énergie se présentant sous deux formes : l'une, cinétique, qui trouve sa définition dans son expression analytique ; l'autre, potentielle, qui nécessite une définition expérimentale bien difficile, semble-t-il, à établir convenablement.

Cet obstacle supposé franchi, il est nécessaire de poser une loi reliant les quatre notions fondamentales : espace, temps, masse et énergie.

Le choix de cette loi parmi les théorèmes généraux de la Mécanique est, dans une certaine mesure, arbitraire. Hertz choisit le principe d'Hamilton, qui exprime que le mouvement réel d'un système, dont on se donne les positions à deux instants t_0 et t_1, est celui qui rend minimum la valeur de l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} (\mathrm{T} - \mathrm{U})\, dt$$

où T représente la partie cinétique de l'énergie et U la partie potentielle.

Dans cette conception de la Mécanique, la notion de force serait introduite analytiquement et résulterait d'une simple définition de mot comme, dans le système classique, la notion de force vive.

Ce système présente l'avantage d'éviter, dans un grand nombre de questions, l'emploi d'hypothèses physiques, qui n'ont pas d'autre objet que de permettre l'application des principes de la mécanique.

L'ensemble des faits qu'il embrasse est plus restreint que celui du système classique, puisqu'il peut être déduit de ce dernier moyennant certaines hypothèses.

En fait, il est trop restreint, et cette défectuosité suffit à le faire rejeter.

Le principe d'Hamilton n'est en effet applicable qu'aux systèmes dont les liaisons s'expriment par des équations à termes finis entre les paramètres.

Or il existe des liaisons s'exprimant au moyen d'équations différentielles non intégrables. Il suffit de citer le cas des mouvements de roulement et de pivotement, cas qui a été l'objet des travaux de certains géomètres [1].

Considérons par exemple le mouvement d'une sphère roulant sans glissement sur un plan horizontal.

A chaque instant, les vitesses sont déterminées par la connaissance de l'axe instantané de rotation autour du point de contact, soit de trois quantités, au lieu de cinq, qui interviendraient, si la sphère pouvait glisser sur le plan.

La sphère, *partant d'une position donnée*, ne peut donc, sans

---

[1] APPELL, HADAMARD. *Mouvements de roulement et de pivotement en dynamique*, Carré et Naud, Paris.

l'intervention de forces extérieures, atteindre que ∞^3 positions.

Mais, les équations de condition n'étant pas intégrables, le nombre des positions différentes dont elle est susceptible cinématiquement doit continuer à être représenté par ∞^5.

Pour deux quelconques de ces ∞^5 positions, le principe d'Hamilton déterminerait évidemment une trajectoire, de sorte qu'en l'appliquant sans précaution, on trouve que, en partant d'une position, la sphère pourrait, sans l'intervention de forces extérieures, atteindre ∞^5 positions, conclusion contraire à la réalité.

Ajoutons que, même dans le cas où les deux positions choisies font partie d'une trajectoire dynamiquement possible (sans l'intervention de forces extérieures), le principe d'Hamilton donne généralement un résultat faux.

Citons, comme second exemple de système matériel dont les paramètres sont soumis à des équations différentielles non intégrables, le cas de la bicyclette.

Ajoutons que les systèmes matériels dont les liaisons peuvent être représentées par un système d'équations à termes finis, c'est-à-dire ceux dont la position est susceptible d'être déterminée par la connaissance d'un certain nombre de paramètres indépendants, sont appelés par Hertz systèmes *holonomes*.

Système hertzien. — Hertz voit la résolution des difficultés que présente la coordination des principes de la Mécanique dans une *explication* de la force.

La Mécanique considère la force indépendamment de sa cause.

Il n'en est pas de même de la Physique, où l'on considère plusieurs sortes de forces, qui se distinguent par leurs causes, forces élastiques, électriques, électrodynamiques, etc.

Ne saurait-on réduire ces causes à une seule, c'est-à-dire donner des diverses forces une *explication* commune ?

Parmi les causes de force (elles sont à la vérité en nombre fort restreint), on trouve le mouvement, c'est-à-dire l'inertie.

Considérons, avec M. Poincaré, un régulateur à boules, auquel nous ferons toutefois subir une modification dans le but de supprimer l'influence de la pesanteur.

Soit un losange articulé ABCD ; l'angle supérieur A est fixe ; l'angle inférieur C porte un anneau qui peut glisser le long d'une tige verticale AX ; à l'anneau C est suspendue une tringle T.

Les côtés inférieurs du losange CB et CD sont prolongés de leur propre longueur et portent à leurs extrémités libres des boules dont la masse domine beaucoup celle du reste de l'appareil. Tout l'appareil est animé d'un mouvement de rotation autour de la tige AX, et on voit que les centres des boules restent dans le plan horizontal du point fixe A, de sorte que l'effet de la pesanteur est complètement éliminé.

La force centrifuge tend à écarter les boules et par conséquent à rapprocher le point C du point A.

Le système est donc susceptible, en raison de son propre mouvement, d'exercer une force par l'intermédiaire de la tringle T.

Supposons que le système soit invisible pour nous. L'observateur attribuera la traction exercée sur la tringle T à une force, à une attraction exercée par le point A sur cette tringle.

L'hypothèse de Hertz peut être exprimée de la manière suivante :

Toutes les forces de la nature sont dues au mouvement de masses perceptibles ou latentes.

On a là, suivant l'expression de Hertz, une *explication dynamique* de la force.

Cette hypothèse postule évidemment l'existence de masses matérielles latentes (*verborgene*), telles que l'éther de Fresnel et de Maxwell.

Il resterait à établir, pour chaque espèce de forces, la théorie particulière qui lui convient, et il faut observer que l'élasticité elle-même n'échappe pas, dans cette manière de concevoir les choses, à la nécessité d'une explication dynamique.

Si nous admettons l'hypothèse de Hertz, nous sommes en mesure, du moins théoriquement, de déterminer les expressions des forces qui s'exercent entre les systèmes matériels, perceptibles ou latents, en vertu de leurs liaisons, et cela en nous appuyant seulement sur le principe de l'inertie, qui, comme on le verra, peut être conçu en dehors de toute notion de force.

Il résulterait donc de là que la force serait éliminée de la Mécanique en tant que notion primordiale, et serait réduite au rôle de notion auxiliaire, simplement définie par une expression analytique.

Telle est la conception de Hertz.

L'hypothèse qui en est la base suffit-elle à supprimer la difficulté rencontrée jusqu'ici dans la définition de la force ? On en jugera plus loin d'après l'exposé que nous ferons de la manière dont Hertz introduit cette définition.

PREMIÈRE PARTIE

GÉOMÉTRIE ET CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES MATÉRIELS

Liaisons. — Hertz soumet les liaisons à la restriction de pouvoir être représentées par des systèmes d'équations linéaires aux différentielles totales de la forme

$$A_1\,\delta q_1 + A_2\,\delta q_2 + \ldots\ldots + A_n\,\delta q_n = 0,$$

où $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sont les paramètres déterminant la position du système, et les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$, des fonctions continues de ces paramètres.

On peut dire, d'une manière équivalente, que la somme de deux déplacements infinitésimaux possibles δq et $\delta' q$ à partir d'une même position est un déplacement infinitésimal possible à partir de cette même position (possibilité de superposer les déplacements infinitésimaux compatibles avec les liaisons).

Hertz rattache la forme linéaire des équations de condition à une propriété des liaisons, qu'il désigne sous le nom de *continuité dans l'infinitésimal* et qui consiste dans le fait que *tout déplacement infinitésimal possible peut être obtenu par une trajectoire rectiligne.*

Il résulte d'abord de la continuité des liaisons, entendue au sens ordinaire de ce mot, qu'on peut opérer successivement deux déplacements infinitésimaux $\delta q\,(\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n)$ et $\delta' q\,(\delta' q_1, \delta' q_2, \ldots, \delta' q_n)$ supposés possibles à partir de la position $q\,(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, car il existe, à partir de la position $q + \delta q$, un déplacement possible ne différant de $\delta' q$ que par des infiniment petits d'ordre supérieur. On peut donc, par ce trajet, faire passer le système de la position q à la position $q + \delta q + \delta' q$.

La condition de Hertz exprime qu'on peut passer en outre de la position q à la position $q + \delta q + \delta' q$ par un trajet rectiligne, ou plutôt, le mot rectiligne n'ayant pas de sens dans l'infinitésimal, que les positions q et $q + \delta q + \delta' q$ appartiennent à une même trajectoire possible, ayant des éléments différentiels du premier et du deuxième ordre continus en cette position.

Nous préférerions l'énoncé suivant, qui nous paraît caractériser les liaisons s'exprimant par des équations linéaires homogènes par rapport aux différentielles des paramètres et qui exprime un fait concret.

Toute trajectoire tracée parmi les positions obtenues par tous les déplacements infinitésimaux possibles à partir d'une position quelconque est une trajectoire possible.

Mouvement d'un point matériel. — Un point assujetti à rester sur une surface fixe et soustrait à toute autre influence, parcourt une géodésique de la surface avec une vitesse constante.

Ce cas est compris dans celui où les coordonnées x, y, z du point sont soumises à une équation différentielle linéaire

$$A dx + B dy + C dz = 0,$$

intégrable ou non.

La loi du mouvement est toujours représentée, en coordonnées rectangulaires, par la formule

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z = 0,$$

δx, δy, δz représentant les variations des coordonnées x, y, z du point dans un déplacement virtuel quelconque compatible avec les liaisons.

Cette formule exprime que la direction de l'accélération est, pour toute position, rectangulaire avec tous les déplacements virtuels.

Comme d'ailleurs l'accélération est toujours contenue dans le plan osculateur de la trajectoire, celle-ci se trouve déterminée par la condition que son plan osculateur contienne, en chaque point, la normale à l'élément superficiel déterminé par tous les déplacements virtuels relatifs à ce point.

Les trajectoires ainsi déterminées, très analogues aux géodésiques d'une surface, jouissent comme celles-ci de la propriété d'avoir, en chacun de leurs points, une courbure moindre que les trajectoires qui leur sont tangentes en ce point.

Nous les appellerons, pour cette raison, *trajectoires de moindre courbure*, traduisant ainsi l'expression de Hertz : *geradeste Bahnen*.

Hertz réserve le nom de *géodésique* aux trajectoires déterminées par la condition que la longueur entre deux de leurs points présente une variation nulle, quand on passe à une trajectoire infiniment voisine réunissant ces deux mêmes points.

Toute ligne de moindre courbure est évidemment une géodésique ; mais la réciproque n'est vraie que dans le cas où l'équation de condition est intégrable.

Car, dans le cas contraire, il passe par un point quelconque de l'espace ∞^1 lignes de moindre courbure, et ∞^2 géodésiques, puisque deux points quelconques de l'espace déterminent au moins une géodésique.

La loi du mouvement d'un point soumis à une condition de l'espèce considérée peut donc s'exprimer en disant que *le point décrit une ligne de moindre courbure avec une vitesse constante.*

Systèmes matériels à liaison. — Hertz les aborde directement. Nous avons pensé qu'en rappelant les propriétés du mouvement du point, nous simplifierions l'exposé de ce qui va suivre.

Nous désignerons par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque du système, par m sa masse, par ds la longueur d'un élément de sa trajectoire.

Une *trajectoire* du système est l'ensemble des positions occupées par le système dans un mouvement continu.

La *longueur* S d'une trajectoire est définie par la formule

$$\mathrm{M}d\mathrm{S}^2 = \Sigma\, m(dx^2 + dy^2 + dz^2) = \Sigma\, mds^2,$$

où l'on pose

$$\mathrm{M} = \Sigma\, m.$$

La *vitesse* V du système est définie par la formule

$$\mathrm{V} = \frac{d\mathrm{S}}{dt} = \sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{M}}},$$

T représentant la force vive.

En indiquant par des accents la dérivation par rapport à S, on a, dans le cas où la force vive est constante,

$$\frac{dx}{dt} = x'\mathrm{V}, \qquad \frac{dy}{dt} = y'\mathrm{V}, \qquad \frac{dz}{dt} = z'\mathrm{V}',$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x''\mathrm{V}^2 + x'\frac{d\mathrm{V}}{dt} = x''\mathrm{V}^2, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = y''\mathrm{V}^2, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = z''\mathrm{V}^2.$$

De la formule fondamentale, qui exprime la loi du mouvement,

$$\Sigma\, m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right) = 0,$$

on déduira donc

$$\Sigma\, m\,(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z) = 0,$$

δx, δy, δz représentant un déplacement virtuel quelconque du système.

Cette dernière formule va nous permettre de déterminer les éléments différentiels du second ordre de la trajectoire en fonction de ses éléments différentiels du premier ordre.

Nous avons admis que les équations de condition étaient de la forme

$$\Sigma\,(\mathrm{A}x' + \mathrm{B}y' + \mathrm{C}z') = 0.$$

En dérivant les premiers membres par rapport à S, on obtient des équations égalant des expressions telles que $\Sigma(\mathrm{A}x'' + \mathrm{B}y'' + \mathrm{C}z'')$ à des fonctions des coordonnées x, y, z et de leurs éléments différentiels du premier ordre, x', y', z', de sorte que, si nous considérons les trajectoires donnant lieu aux mêmes valeurs x', y', z' pour les dérivées premières relatives à chacun des points du système, l'on aura, pour les dérivées secondes, des équations de condition de la forme

$$\Sigma\,(\mathrm{A}\delta x'' + \mathrm{B}\delta y'' + \mathrm{C}\delta z'') = 0,$$

c'est-à-dire que les variations $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ seront soumises aux mêmes conditions que les variations δx, δy, δz.

La loi du mouvement pourra donc être exprimée par la formule

$$\Sigma\, m\,(x''\,\delta x'' + y''\,\delta y'' + z''\,\delta z'') = 0$$

ou

$$\delta\Sigma\, m\,(x''^2 + y''^2 + z''^2) = 0.$$

Hertz appelle *courbure* d'une trajectoire la quantité c définie par la formule

$$Mc^2 = \Sigma\, m\,(x''^2 + y''^2 + z''^2).$$

En outre, deux trajectoires passant par une même position y sont dites *tangentes*, lorsque, pour chacun des points du système, les dérivées x', y', z' ont respectivement les mêmes valeurs dans les deux trajectoires, c'est-à-dire que, dans deux trajectoires tangentes, tout point matériel du système décrit deux trajectoires tangentes, et le rapport des vitesses est le même pour tous les points du système.

Moyennant ces définitions, la loi du mouvement peut être exprimée en disant qu'un système à liaison, soustrait à toute autre influence, *parcourt avec une vitesse constante une trajectoire de moindre courbure*, en appelant, comme dans le cas du point, *trajectoire de moindre courbure* une trajectoire qui présente, en chacune des positions qui la composent, une courbure moindre que toutes les trajectoires possibles qui lui sont tangentes en cette position.

Hertz, voulant faire un exposé didactique de la Mécanique sans employer les principes ordinaires, pose cette loi comme un principe expérimental en tête de la deuxième partie de son livre.

Nous avons préféré déduire tout d'abord ladite loi des principes de d'Alembert et des travaux virtuels et montrer qu'on est ainsi conduit naturellement à la terminologie de Hertz, terminologie que nous allons maintenant brièvement compléter.

Comme dans le cas du point, on distingue les *géodésiques* des *trajectoires de moindre courbure*, ces deux espèces de trajectoires se confondant, lorsque les équations de condition sont intégrables, c'est-à-dire lorsqu'il est possible de déterminer la position du système au moyen d'un certain nombre de paramètres indépendants.

Les trajectoires *rectilignes* sont celles dont la courbure est nulle, c'est-à-dire pour lesquelles on a

$$x'' = 0, \qquad y'' = 0, \qquad z'' = 0,$$

ou encore dans lesquelles les divers points du système décrivent des lignes droites, les espaces parcourus dans le même temps par tous les points étant proportionnels.

Deux positions déterminent une trajectoire rectiligne, en admettant bien entendu que les points matériels composant le système ne soient soumis à aucune liaison.

La *distance* de deux positions est la longueur de la trajectoire rectiligne réunissant les deux positions.

Cette distance R est donnée par la formule

$$\mathrm{MR}^2 = \Sigma\, m\,[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2] = \Sigma\, mr^2.$$

L'*angle* ω de deux trajectoires rectilignes est défini par la formule suivante

$$\sqrt{\Sigma\, mr^2}\,\sqrt{\Sigma\, mr'^2}\cos\omega = \Sigma\, mrr'\cos\theta$$

ou

$$\mathrm{MRR'}\cos\omega = \Sigma\, mrr'\cos\theta.$$

On vérifiera que la courbure d'une trajectoire est égale au rapport de l'angle de deux éléments infiniment voisins à la longueur de l'arc correspondant.

On définit le *parallélisme* de deux trajectoires rectilignes par la condition que leur angle soit nul.

En d'autres termes, les droites décrites par un même point matériel dans les deux trajectoires sont parallèles.

On parvient ainsi à la notion de *direction*.

Deux directions sont *rectangulaires* quand leur angle est égal à $\frac{\pi}{2}$.

La condition s'exprime, en désignant par α, β, γ et α', β', γ' les cosinus directeurs des déplacements du point de masse m dans les deux trajectoires rectilignes, par la formule

$$\Sigma\, m\,(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') = 0.$$

Par une position quelconque passent ∞^{3n-2}, trajectoires rectilignes rectangulaires avec une direction donnée.

La notion de *quantité vectorielle* comprend les notions de direction et de longueur, c'est-à-dire s'applique à un ensemble de vecteurs affectés chacun à un des points du système.

Si u, v, w sont les composantes, suivant les axes de coordonnées, du vecteur affecté à un point de masse m appartenant au système, la grandeur R de la quantité vectorielle est donnée par la formule

$$MR^2 = \Sigma m (u^2 + v^2 + w^2).$$

L'ensemble des vecteurs qui représentent les vitesses des différents points du système est une quantité vectorielle, dont la grandeur V est donnée, d'après la formule précédente, par

$$MV^2 = \Sigma m \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right],$$

et coïncide avec la valeur déjà donnée de la vitesse.

Cette quantité vectorielle prend elle-même le nom de *vitesse*.

On définira de même, sous le nom d'*accélération*, une quantité vectorielle constituée par l'ensemble des vecteurs représentant les accélérations des divers points.

La grandeur f de l'accélération sera donnée par la formule

$$Mf^2 = \Sigma m \left[\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2 \right].$$

On appelle *composante d'une quantité vectorielle* suivant une direction donnée une quantité vectorielle ayant la direction donnée et ayant pour grandeur la projection rectangulaire sur cette direction de la quantité vectorielle, c'est-à-dire la grandeur de cette dernière multipliée par le cosinus de l'angle des deux directions.

En décomposant l'accélération de chacun des points du système suivant la tangente à la trajectoire de ce point, on obtient par cela même la décomposition de l'accélération du système en une *composante tangentielle* f_t et une *composante normale* f_n.

On reconnaît facilement que l'on a

$$f_t = \Sigma \frac{m \dfrac{dx}{dt} \dfrac{d^2x}{dt^2}}{MV} = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2},$$

$$f_n^2 = f^2 - f_t^2 = c^2V^2 \text{ ou } f_n = cV^2,$$

en tenant compte des relations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x''V^2 + x'\frac{dV}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = y''V^2 + y'\frac{dV}{dt'}; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = z''V^2 + z'\frac{dV}{dt'}$$

$$\Sigma m (x'^2 + y'^2 + z'^2) = M, \qquad \Sigma m (x'x'' + y'y'' + z'z'') = 0.$$

La direction de la quantité vectorielle caractérisée par l'ensemble des vecteurs x'', y'', z'' peut être assimilée à la direction de la *normale principale* d'une courbe.

La composante normale de l'accélération est dirigée suivant cette normale principale.

Il est facile de voir que, dans le cas où il n'existe pas d'autres forces que celles dues aux liaisons, la loi du mouvement peut être exprimée ainsi :

Dans toute position du système, *la direction de l'accélération est rectangulaire avec tous les déplacements virtuels relatifs à cette position.*

On peut encore dire :

Le mouvement naturel, dans le cas où il n'existe pas d'autres forces que celles dues aux liaisons, est celui qui rend minimum la grandeur de l'accélération.

Il est entendu que les données du mouvement sont la position du système, la direction et la grandeur de la vitesse.

L'une quelconque des propositions ci-dessus suffit à déterminer les éléments différentiels du second ordre des coordonnées en fonction de ces coordonnées et de leurs éléments différentiels du premier ordre, et par suite permet la mise en équation du problème du mouvement.

Supposons maintenant que la position du système soit déterminée au moyen d'un certain nombre de paramètres ou coordonnées $q_1, q_2, \ldots, q_r$.

A partir d'une position du système, faisons varier une coordonnée q en laissant les autres constantes. La direction de la trajectoire ainsi obtenue sera appelée la *direction de la coordonnée q* pour la position considérée.

Pour une position du système, la vitesse est complètement déterminée en grandeur et en direction par ses composantes suivant les directions des coordonnées, de même que la vitesse d'un point assujetti à se mouvoir sur une surface fixe est déterminée par ses composantes suivant les tangentes aux courbes de coordonnées curvilignes choisies sur la surface.

Il n'en est pas de même de l'accélération, lorsque le nombre des coordonnées q est inférieur à $3n$, n étant le nombre des points matériels.

Si l'on désigne par T l'expression de la force vive en fonction des coordonnées q et de leurs dérivées q' par rapport au temps on trouve, en appliquant les définitions données, que la composante f_q suivant la coordonnée q de l'accélération f est donnée par la formule

$$\mathrm{M} f_q = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q},$$

où le terme $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'}$ est dû à la composante tangentielle de l'accélération et le terme $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q}$, à sa composante normale.

La condition que l'accélération doit être rectangulaire avec tous les déplacements virtuels du système s'écrira

$$\Sigma f_q\, \delta q = 0,$$

où les δq représentent un déplacement virtuel quelconque.

Si les δq sont arbitraires, la condition s'écrira

$$f_q = 0 \text{ ou } \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} = 0 \text{ (} r \text{ équations).}$$

Si les δq sont soumis à des équations de condition de la forme

$$\Sigma a\delta q = 0, \ \Sigma b\delta q = 0 \ldots\ldots,$$

on devra avoir

$$f_q = \lambda a + \lambda' b + \ldots\ldots$$

ou

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} = \lambda a + \lambda' b + \ldots\ldots \text{ (} r \text{ équations).}$$

La terminologie de Hertz s'applique non moins heureusement au cas où le système est soumis à des forces.

Ces forces déterminent une quantité vectorielle qui représentera, par définition, la *force* appliquée au système matériel.

En désignant par J la quantité vectorielle à laquelle a été donné le nom d'accélération, l'équation générale de la dynamique exprime que *la quantité vectorielle* MJ — F *est rectangulaire avec tous les déplacements virtuels*, le signe — indiquant une opération sur les quantités vectorielles, dont la signification est évidente.

Cette quantité vectorielle peut être appelée la *contrainte* (*der Zwang* de Gauss), et l'on voit que le mouvement est déterminé par la condition que *la grandeur de la contrainte soit minimum*, les mouvements comparés présentant, pour la position considérée, la même vitesse en grandeur et en direction.

On voit que les propositions générales de la mécanique des systèmes à liaisons prennent, moyennant la terminologie de Hertz, une forme particulièrement simple.

Il est juste d'observer qu'une terminologie analogue, peut-être un peu moins heureuse, avait déjà été exposée par Julius Kœnig (1).

DEUXIÈME PARTIE

MÉCANIQUE DES SYSTÈMES MATÉRIELS

Dans cette partie de son ouvrage, Hertz s'est proposé d'édifier la Mécanique rationnelle, moyennant son hypothèse et sa terminologie, suivant une ordonnance parfaitement logique.

En fait il ne s'agit pas d'autre chose que de supprimer la force en tant que notion primordiale.

Les notions d'espace, de temps et de masse étant supposées acquises, les liaisons entre les masses étant supposées indépendantes du temps et soumises aux restrictions déjà indiquées, Hertz appelle *libre* un système matériel dont les liaisons sont *internes*, c'est-à-dire n'intéressent que les *positions relatives* des points du système, ou, plus nettement, permettent tout déplacement sans déformation du système.

Hertz pose à priori, comme loi fondamentale de la Mécanique, la loi du mouvement des systèmes libres, savoir :

Tout système libre décrit une trajectoire de moindre courbure avec une vitesse constante.

Par hypothèse, tout système non libre fait partie d'un système libre, et son mouvement peut par conséquent, au moins théoriquement, être déterminé au moyen de la loi fondamentale.

Telle est l'économie générale de l'édifice logique construit par Hertz.

Sa terminologie lui a permis d'exprimer sous forme de loi unique les propriétés du mouvement des systèmes libres.

---

(1) Julius Kœnig, *Interpretation der fundamental Gleichungen der Dynamik. Math. Annalen*, 1888, t. XXXI.

Son hypothèse sur la nature de la force, réduite à n'être qu'une manifestation du mouvement de masses perceptibles ou latentes, lui permet de construire la Mécanique au moyen des seules notions d'espace, de temps et de masse.

De la loi fondamentale Hertz déduit facilement, pour les systèmes libres, les équations de Lagrange ainsi que toutes les propositions générales de la mécanique, *y compris les principes du centre de gravité et des aires*.

Tout système matériel dont le mouvement n'est pas régi par la loi fondamentale, doit être considéré comme lié à des masses ne faisant pas partie du système.

Soient $q_1, q_2, \ldots, q_r$ les paramètres du système partiel considéré et $p_1, p_2, \ldots, p_s$, les paramètres déterminant les positions des autres masses du système total.

Une équation de liaison sera de la forme

$$\Sigma \, \mathrm{A} dq + \Sigma \, \mathrm{B} dp = 0.$$

Un cas particulièrement simple est celui où les masses extérieures au système q restent fixes, c'est-à-dire où $dp = 0$.

Dans ce cas, les équations de condition expriment simplement que ce système est soumis à des liaisons indépendantes du temps et, quoique non libre, il aura son mouvement régi par la loi fondamentale, ce qui devrait être, puisque, en partant des principes habituels de la Mécanique, nous avons établi une loi pour tous les systèmes à liaisons, libres ou non libres, sur lesquels ne s'exerce aucune autre force que celles dues aux liaisons, le mot *force* étant employé dans son sens habituel.

Il n'est peut-être pas sans intérêt de remarquer, notamment pour la recherche de la signification des principes du centre de gravité et des aires, que, dans tous les cas de la nature où les liaisons d'un système ne lui permettent pas tous les déplacements sans déformation, l'on peut toujours lui adjoindre des masses *perceptibles*, c'est-à-dire des corps solides, liquides ou gazeux, telles que les liaisons deviennent *internes*.

Revenons au cas général.

Le terme dû à la liaison considérée dans l'équation de Lagrange relative à la coordonnée q sera de la forme $\lambda \mathrm{A}$.

Si l'on regarde comme connu le mouvement des masses ne faisant pas partie du système partiel des q, le coefficient λ sera déterminé de la manière habituelle en se servant de l'équation de liaison, qui prend la forme

$$\Sigma\, A dq + C dt = 0,$$

en posant

$$\Sigma B \frac{dp}{dt} = C,$$

et l'on voit facilement que le résultat concorde avec celui que donne le principe de d'Alembert étendu au cas des liaisons dépendantes du temps.

Ainsi s'expliquerait la validité de ce dernier principe.

La notion de force. — Hertz, pour introduire la notion de force, considère une sorte de liaison susceptible de s'exprimer par l'égalité d'un ou plusieurs paramètres d'un autre système. Cette sorte de liaison est appelée par Hertz *accouplement* (*Koppelung*).

Si q et p sont respectivement des paramètres égaux des deux systèmes, l'équation de condition

$$q = p \quad \text{ou} \quad \delta q - \delta p = 0$$

donnera naissance, dans les équations de Lagrange relatives respectivement à q et à p, à des termes égaux et de signes contraires, de sorte que, si Q est le terme dû à la liaison dans l'équation relative à q et P le terme analogue dans l'équation relative à p, on aura

$$Q = -P.$$

Nous voici parvenus au point vital de l'ouvrage de Hertz, à l'introduction de la notion de force.

Nous tombons en même temps en pleine obscurité. Aussi croyons-nous ne pouvoir mieux faire que de mettre sous les yeux du lecteur une traduction littérale du texte même, en supprimant seulement les démonstrations ainsi que certaines considérations étrangères à la question qui nous occupe.

DÉFINITION. — Sous la dénomination de force, nous entendons l'influence que l'un des deux systèmes accouplés exerce sur l'autre en raison de la loi fondamentale.

CONSÉQUENCE. — A chaque force correspond nécessairement une réaction (Gegenkraft).

Car. . . . .

Représentation analytique de la force. — Nous pouvons et voulons donc, en concordance avec la définition, poser que l'ensemble des quantités P déterminées pour toutes les coordonnées p doit constituer l'expression analytique de la force, que le système des p exerce sur le système des q. Les quantités P ou encore Q s'appellent les composantes de la force suivant les coordonnées correspondantes p ou q, ou simplement les forces suivant ces coordonnées.

Par cette détermination nous établissons la concordance avec la désignation actuelle de la mécanique, et la nécessité de réaliser cet accord justifie suffisamment le choix que nous avons fait parmi plusieurs déterminations possibles.

Conséquence. — La force qu'un système exerce sur un autre peut être considérée comme une quantité vectorielle relative au deuxième système, dont les composantes suivant les coordonnées communes sont en général différentes de zéro, dont les composantes suivant les coordonnées non communes s'annulent, enfin dont les composantes suivant les directions qui ne peuvent s'exprimer par les variations des coordonnées employées restent indéterminées.

Deuxième conséquence. — La force qu'un système exerce sur un autre peut être considérée aussi bien comme une quantité vectorielle relative au premier système.

. . . .

L'action et la réaction sont égales et opposées. On doit entendre par là que leurs composantes, suivant chacune des coordonnées employées, sont égales et opposées, et cela, que l'on considère la force comme une quantité vectorielle dans un ou dans l'autre système.

Car. . . . .

Remarque 1. — La proposition précédente correspond à la Lex tertia de Newton et est dénommée le principe de la réaction. Pourtant son contenu ne coïncide pas complètement avec le contenu de cette troisième loi, leur rapport exact est le suivant :

La loi de Newton contient complètement notre proposition, suivant les vues de son auteur, comme le montrent les exemples mis à l'appui de la loi. Mais la loi de Newton contient davantage. Du moins elle est généralement appliquée aux actions à distance, c'est-à-dire aux forces qui s'exercent entre deux corps n'ayant pas de coordonnées communes.

Mais notre mécanique ne connaît pas de telles forces. C'est ainsi que, pour que l'on puisse, par exemple, déduire de notre proposition la conséquence qu'une planète attire le soleil avec une force égale à celle avec laquelle elle est attirée par lui, il est nécessaire d'avoir des données plus intimes sur la nature de la liaison existante entre les deux corps.

Remarque 2. — On peut se demander si le surplus que présente le principe de la réaction sur notre proposition peut figurer à juste titre parmi les lois fondamentales de la Mécanique ou si, au contraire, la partie essentielle et valable en toute généralité de ce principe, ne consiste pas dans notre proposition.

En ce qui concerne la forme, la portée de la troisième loi, dans son application aux actions à distance, n'est pas clairement exprimée. Car, si la force et la réaction sont appliquées à des corps différents, ce que l'on entend par direction opposée n'est pas net. C'est ce qui arrive, par exemple, lorsqu'il s'agit de l'action réciproque entre deux éléments de courant. En ce qui concerne le contenu, l'application du principe de la réaction aux actions à distance de la Mécanique habituelle, représente évidemment un fait d'expérience dont l'exactitude dans tous les cas commence à devenir douteuse. Ainsi on est presque convaincu que l'action réciproque entre deux particules magnétisées en mouvement ne satisfait pas au principe dans tous les cas.

Des questions se présentent en foule que l'on voudrait poser à Hertz.

Tout d'abord, quelle est la signification physique, s'il en existe une, de cette sorte de liaison que Hertz appelle *accouplement* de deux systèmes et qu'il ne définit que par une propriété analytique, savoir le fait d'avoir les coordonnées communes ?

Incidemment, à propos de la loi de l'égalité de l'action et de la réaction, Hertz nous apprend à ce sujet que les actions à distance sont celles qui s'exercent entre deux corps n'ayant pas de coordonnées communes et que sa mécanique ne connaît pas de telles forces.

Quelle sorte d'incompatibilité Hertz conçoit-il entre le fait analytique d'avoir des coordonnées communes et le fait physique de s'actionner à distance ?

Ce n'est pas que dans cette obscurité on n'aperçoive l'idée directrice.

Hertz songe évidemment à la théorie des systèmes cycliques, qu'il exposera tout à l'heure après son génial créateur, Helmholtz, et tout particulièrement à la théorie cinétique de l'électrodynamique de Maxwell.

L'image mécanique de Maxwell, encore qu'assez imprécise, est pour Hertz le *modèle* de toute explication mécanique.

Or, dans cette théorie, on considère un système matériel hypothétique, dont la force vive dépend des coordonnées des corps perceptibles, ce qui revient à dire qu'il existe entre le système hypothétique et les corps perceptibles une liaison consistant dans le fait d'avoir des coordonnées communes (coordonnées *contrôlables*).

C'est là que nous voyons l'origine de l'idée d'*accouplement*, à laquelle Hertz attache tant d'importance, qu'en dehors d'elle il ne conçoit pas la notion de force.

Il semblerait, à le lire, que c'est grâce à elle que l'on retrouve la loi de l'égalité de l'action et de la réaction ou tout au moins ce qui doit la remplacer.

Mais il n'en est rien. Car, ce que Hertz conserve de cette loi, savoir le principe du centre de gravité et celui des aires, résulte immédiatement de son hypothèse primordiale que toutes les forces sont des forces de liaison.

En effet, les forces de liaison ont un travail nul dans tout déplacement virtuel compatible avec ces liaisons, et en particulier, quand il s'agit d'un système libre, dans tout déplacement sans déformation, ce qui constitue précisément la condition pour que ces forces se fassent équilibre au sens que présente ce dernier mot dans la mécanique des corps indéformables.

Le postulat est au fond celui-ci :

Nous ne saurions concevoir de liaisons ne permettant pas tous les déplacements sans déformation de l'ensemble des masses matérielles intéressées, de sorte que l'existence d'une liaison empêchant un système matériel de se déplacer librement sans déformation, exige toujours la présence de masses matérielles étrangères au système.

Du reste, les forces de liaison peuvent toujours être calculées sans avoir recours à la loi de l'égalité de l'action et de la réaction. Cette dernière loi devient donc complètement inutile, si l'on admet, avec Hertz, qu'il n'existe que des forces de liaison.

J'ajoute qu'en étendant convenablement le postulat ci-dessus, on peut *démontrer*, dans le cas de forces quelconques, les principes du centre de gravité et des aires et, d'une façon générale, calculer l'action exercée par un système sur un autre, connaissant l'action exercée par le second sur le premier, ce qui constitue en somme le rôle de la loi de l'égalité de l'action et de la réaction.

On conclura sans doute, avec nous, que la manière dont Hertz introduit la notion de force, n'est pas pleinement satisfaisante.

Du reste, l'arbitraire qui subsiste dans la détermination de la force quand on la définit, comme le fait Hertz, par certains termes des équations de Lagrange, ne saurait, croyons-nous, convenir à une notion qui, en dehors de toute théorie mécanique, s'impose si naturellement à notre esprit.

N'y a-t-il pas quelque chose de plaisant à vouloir refuser le droit d'existence à la notion de force, alors que, dans la pratique, nous n'éprouvons aucune hésitation à déterminer la direction d'une force et à en mesurer la grandeur.

Certaines, parmi les objections qui se présentent naturellement, quand il s'agit de *définir* (mais non de mesurer effectivement) la grandeur d'une force, ne se présentent-elles pas également pour les notions les mieux établies ?

Considérons, par exemple, les notions associées de longueur et de déplacement sans déformation, qui servent, peut-on dire, de base à la science tout entière.

Si l'on essaie de définir l'égalité (ou la comparaison) de deux longueurs, on est ramené à la notion de déplacement sans déformation. Mais les savants n'ignorent pas qu'il n'existe pas de corps se déplaçant sans déformation. Pour les ignorants, au contraire, il en existe un très grand nombre, et c'est leur notion grossière de corps indéformable qui est la base de la Géométrie, science *pure* par excellence pourtant, et qu'une analyse uu peu subtile découvrirait au fond des conceptions physiques les plus compliquées, notion simple à la vérité, non pas parce qu'elle est obtenue par abstraction, ce qui n'est pas, mais parce qu'elle est le résultat tout inconscient du premier regard que nous jetons sur la nature.

La notion de force, comme celle de longueur, est essentiellement subjective, et il est illusoire d'en chercher une définition purement objective.

Mouvements cycliques. — L'étude des mouvements cycliques est due aux idées qui ont conduit les physiciens à identifier certaines énergies potentielles (chaleur, potentiel électrodynamique, etc.) à l'énergie cinétique.

Hertz termine son ouvrage par un exposé de la théorie des systèmes cycliques. Nous croyons, en raison de l'influence que paraît avoir eue cette théorie dans la genèse des idées de Hertz sur la Mécanique, devoir en rappeler les principes.

Considérons un système matériel dont la position dépende de coordonnées de deux sortes, q et φ, celles-ci n'entrant dans l'expression de la force vive du système que par leurs dérivées, et les premières donnant lieu à une force vive négligeable par rapport à la force vive correspondante aux secondes.

Les coordonnées φ sont appelées *cycliques*.

En somme, en écrivant la force vive

$$T = T_q + T_{q\varphi} + T_\varphi,$$

on ne conserve que le dernier terme et on suppose en outre que les coefficients des carrés et des produits des dérivées $\frac{d\varphi}{dt}$ ne dépendent que des coordonnées q.

Il est clair qu'on ne saurait admettre en toute rigueur que les dérivées des coordonnées q n'entrent pas dans l'expression générale de T. Mais on peut ne considérer que des mouvements dans lesquels les termes contenant ces dérivées sont négligeables par rapport aux termes ne contenant que les dérivées des coordonnées cycliques.

L'équation de Lagrange, pour une coordonnée q, sera de la forme

$$-\frac{\partial T}{\partial q} = P$$

et pour une coordonnée φ,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = F.$$

Supposons que le système cyclique soit *accouplé* à un système par les paramètres q, c'est-à-dire supposons que ces paramètres q soient constamment égaux respectivement à des paramètres en nombre égal du second système.

Le terme dû au mouvement du système cyclique dans l'équation de Lagrange relative au paramètre du nouveau système considéré égal à q sera — P ou $\frac{\partial T}{\partial q}$, et le travail dans un déplacement de ce dernier système sera

$$d\mathfrak{T} = \Sigma \frac{\partial T}{\partial q} dq.$$

L'expression de T sera, dans deux cas intéressants, uniquement fonction des paramètres q, savoir dans le cas où les dérivées $\frac{d\varphi}{dt} = \varphi'$ sont constantes, et dans le cas où les quantités $\frac{\partial T}{\partial \varphi'}$ sont constantes.

On a, dans le premier cas,

$$d\mathfrak{C} = dT,$$

et dans le second cas,

$$d\mathfrak{C} = -dT.$$

Dans le premier cas, le mouvement est dit isocyclique ; dans le second cas, il est dit adiabatique.

On a, dans ce dernier cas,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = 0,$$

c'est-à-dire que la force exercée sur le système cyclique suivant la coordonnnée φ est nulle.

Le système est alors dit *conservatif.*

L'énergie cinétique T du système cyclique représente le potentiel des forces exercées par ce système sur le système ayant pour paramètre q.

Les propriétés des systèmes cycliques conduisent à des formules intéressantes, qui ont suggéré des théories mécaniques de phénomènes physiques.

Nous ne citerons que la propriété suivante :

Supposons que le système soit monocyclique, c'est-à-dire ne dépende que d'une coordonnée cyclique φ.

Soit dQ le travail de la force cyclique, c'est-à-dire soit

$$dQ = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi'}\, d\varphi = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi'} \times \varphi'\, dt = \varphi'\, d\frac{\partial T}{\partial \varphi'}.$$

On a d'autre part

$$T = \frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial \varphi'}\varphi'.$$

D'où

$$\frac{dQ}{T} = 2\,\frac{d\,\frac{\partial T}{\partial \varphi'}}{\frac{\partial T}{\partial \varphi'}} = d \log\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'}\right)^2 = d \log\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'}\right)^2.$$

En posant

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \Phi,$$

on a

$$\int \frac{dQ}{T} = \log \frac{\Phi^2}{\Phi_0^2}.$$

En admettant que la force vive T soit proportionnelle à la température, on aurait là une expression de l'entropie.

Nous nous sommes proposé de faire connaître, dans ces quelques pages, ce qui nous a paru important dans l'ouvrage de Hertz, laissant au lecteur le soin de faire les nombreuses réflexions qu'inspirent le sujet d'abord, les idées de Hertz ensuite.

A titre de conclusion à notre étude, nous donnons l'appréciation suivante émise sur la théorie de Hertz, par M. Poincaré [1] :

« Intéressante à coup sûr, elle ne me satisfait pas entièrement, parce qu'elle fait la part trop grande à l'hypothèse. »

. . . .

« Néanmoins, par cela seul qu'il est nouveau, ce mode d'exposition est utile ; il nous force à réfléchir, à nous affranchir de vieilles associations d'idées. Nous ne pouvons pas encore voir le monument tout entier ; c'est quelque chose d'en avoir une perspective nouvelle, prise d'un point de vue nouveau. »

G. Combebiac (Limoges).

---

[1] H. Poincaré, *loc. cit.*