Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1902)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: BIBLIOGRAPHIE

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 21.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

BIBLIOGRAPHIE

ALBUQUERQUE (Joachim d'Azevedo). — **Trigonometria plana** de conformidade com o programma official do ensino secundario e com 152 exercicios, Un vol. in-8°, 202 p.; Imprensa portuguesa, Porto, 1901.

Ce manuel de Trigonométrie plane contient l'ensemble des matières figurant dans la plupart des programmes d'enseignement secondaire. Son exposé est clair, les définitions sont choisies avec beaucoup de soin et les divers chapitres sont accompagnés de nombreux exercices bien ordonnés. Sauf les restrictions que nous allons faire quant à la marche suivie, il s'agit là d'un bon manuel qui pourra être employé avec succès dans les gymnases portugais.

L'auteur répartit systématiquement les matières en deux parties : 1° fonctions trigonométriques ; 2° résolution des triangles. Il définit les fonctions trigonométriques à l'aide de la notion de coordonnées rectangulaires, puis il fait une étude approfondie de ces fonctions, de leurs relations fondamentales et des formules d'addition. Ce n'est qu'après avoir épuisé l'étude élémentaire des fonctions trigonométriques que l'auteur aborde la résolution des triangles et les applications classiques.

A cette répartition *systématique* qui convient à un enseignement s'adressant à des élèves ayant été initiés aux problèmes de la trigonométrie, nous aurions préféré un ordre plus *méthodique* permettant de mettre en évidence, dès le début, le véritable but de la trigonométrie, et qui consiste à faire une première étude de la résolution des triangles, tout au moins des triangles rectangles, immédiatement après les définitions des fonctions trigonométriques. Nous engageons les professeurs qui sont appelés à utiliser ce manuel à faire suivre les exercices du § 1 de quelques problèmes numériques empruntés à la résolution des triangles. Ces problèmes leur permettront non seulement d'insister sur le but de la trigonométrie, mais d'éveiller aussi chez les élèves de l'intérêt pour l'étude qu'ils abordent.

Quant aux calculs numériques, l'auteur se sert encore des tables à sept décimales, conformément aux programmes portugais. Nous ne doutons pas que si l'auteur avait eu libre choix, il aurait donné la préférence aux tables à cinq décimales, tables actuellement en usage dans la plupart des établissements secondaires.

H. F.

P. BARBARIN. — **Géométrie non euclidienne**. Fascicule 15 de la *Collection Scientia.* C. Naud, éditeur, Paris. Un volume in-8° de 80 pages; prix : 2 francs.

L'ouvrage que vient de publier M. P. Barbarin est digne de remarque à bien des points de vue. Que l'auteur ait bien exposé la partie de la science à laquelle il s'est attaché, c'est ce qu'on ne saurait mettre en doute, étant donné les efforts connus de longue date qu'il y a consacrés, les mémoires qu'il a présentés à l'Académie de Belgique et que la dite académie a appréciés de la façon la plus honorable, surtout pour un professeur chargé d'un cours absorbant.

Mais ce n'est pas tant à l'exposition, même très claire, d'un grand nombre de faits géométriques, qu'a visé M. Barbarin ; le cadre forcément restreint des volumes de *Scientia* ne le lui permettant guère. Il a voulu surtout faire une œuvre philosophique en montrant rapidement et élégamment la solidité et l'admirable harmonie de la géométrie euclidienne appuyée sur le postulatum d'Euclide et la non moins grande solidité et harmonie des géométries plus générales appuyées sur des postulats plus généraux.

A mon humble avis, c'est ainsi, en effet, qu'un esprit sain doit comprendre les choses. Depuis l'origine de l'espèce humaine, les croyances des hommes ont été des dogmes avec leurs conséquences plus ou moins logiques ; je dis plus ou moins, car les hommes n'ont pas toujours su raisonner logiquement et rigoureusement, même avec des points de départ donnés. Je crois même que beaucoup ne savent pas encore le faire à l'heure actuelle. Mais, comme les grands géomètres dont la science nous conserve les noms ont été de bons logiciens, il s'impose au moins autant d'examiner les postulats franchement dogmatiques sur lesquels ils se sont appuyés que d'en chercher uniquement de nouvelles conséquences.

L'examen du postulatum d'Euclide, montre en lui un fait que notre conception de l'Univers et nos sens grossiers nous font accepter comme vrai et même comme absolument nécessaire dans la pratique vulgaire des êtres géométriques.

Mais, en dépit de ce que dit M. Pietzker dans le précédent fascicule de cette présente publication, je crois que la conception de l'Univers peut varier d'un individu à un autre, tout comme varie également de l'un à l'autre le rapport des crédits que nous accordons respectivement aux témoignages de notre intelligence et aux témoignages matériels de nos sens.

Ce rapport, nul chez la brute et très faible chez un esprit peu cultivé, prend au contraire une valeur très grande chez le philosophe, pour en prendre une infinie chez le métaphysicien.

Et même si l'on pouvait prendre texte de la forme tangible de l'espace pour établir le postulatum d'Euclide, rien n'empêcherait, comme l'a montré M. Poincaré, de concevoir des êtres intelligents vivant dans des conditions physiques différentes des nôtres et telles que le fameux postulatum soit manifestement faux pour eux.

A Euclide, lui-même, comme le dit M. Barbarin, revient la gloire d'avoir mis en évidence les postulats en nombre strictement minimum nécessaire à l'édification de l'admirable géométrie qui porte son nom, mais le géomètre était trop grand et voyait trop loin pour s'imaginer condenser en quelques lignes de la vérité absolue ; il demande qu'on les lui accorde sans ajouter aucune formule d'anathème destinée à qui ne les lui accorderait pas.

L'œuvre, encore debout presque intacte après deux mille ans, est éternelle. Il n'y a pas de contradicteurs de la géométrie euclidienne ; il y a eu seulement des savants comme Lobatchewsky et Riemann qui ont travaillé, à l'exemple d'Euclide, en admettant des postulats différents.

Et comme ces deux derniers étaient aussi d'admirables logiciens et que leurs démonstrations sont incontestables, pourquoi leur contester une gloire qui est exactement de même nature que celle d'Euclide ?

Quant à savoir si ce sont les postulats d'Euclide, ceux de Lobatchewsky, ceux de Riemann ou d'autres qui sont vrais, à quoi bon discuter. Est-il de la nature de l'homme de posséder des vérités absolues. A défaut de choses vraies, la science nous donnera des choses commodes et nous ne pouvons pas, je crois, prétendre à plus.

Après ces lignes, destinées à mettre en évidence l'extrême intérêt de la géométrie non euclidienne, examinons un peu le livre même de M. Barbarin.

Après un premier chapitre de considérations générales et historiques, l'auteur met bien en évidence les postulats admis par Euclide et notamment trois tels que, si l'on en abandonne un des deux derniers, on est conduit immédiatement aux géométries lobatchewskienne et riemannienne.

En admettant les trois ensemble, on retrouve la géométrie euclidienne.

Nous examinons ensuite les travaux de M. de Tilly qui considèrent la distance comme une des notions premières et fondamentales.

Si l'on prend trois points dans un espace à une dimension, c'est-à-dire trois points sur une ligne, il y a une relation bien simple entre les trois distances ainsi déterminées. Dans l'espace à deux dimensions, quatre points déterminent six distances entre lesquelles il y a aussi une relation, encore bien connue dans le cas où les quatre points sont sur un plan euclidien. C'est celle qui lie les côtés et les diagonales d'un quadrilatère.

De même, dans l'espace à trois dimensions, il y a une relation entre les dix distances de cinq points.

Sa complication croît, comme on voit, avec le nombre des dimensions de l'espace. M. de Tilly l'a donnée d'une manière générale, que l'espace soit supposé euclidien ou non.

En étudiant la géométrie générale dans le plan et dans l'espace, M. Barbarin, laisse toujours apercevoir nettement à côté des théorèmes généraux les cas particuliers qui constituent ceux de la géométrie euclidienne. Beaucoup de propositions de la géométrie usuelle qui, par exemple, ne se conservent pas lorsqu'on substitue des longueurs à des angles, se conservent avec une symétrie parfaite en géométrie générale.

L'étude de la trigonométrie est également très suggestive à ce point de vue. En trigonométrie lobatchewskienne les fonctions hyperboliques s'introduisent aussi naturellement que les fonctions circulaires en trigonométrie riemannienne.

La comparaison est tout à l'avantage de l'existence légitime des fonctions hyperboliques que l'on méconnaît trop souvent pour faire usage de notations exponentielles beaucoup plus compliquées.

L'auteur consacre ensuite très indulgemment un chapitre aux contradicteurs de la géométrie non euclidienne.

J'ai expliqué plus haut que les géomètres non euclidiens n'étaient nullement des contradicteurs de la géométrie euclidienne. Mais, chose bizarre, la géométrie générale a rencontré chez certains euclidiens des contradicteurs et même des détracteurs qui rappellent tout à fait l'illustre chevalier Don Quichotte combattant contre les moulins à vent, ne serait-ce que par leur sincérité.

Les objections de ces derniers sont, en général, des cercles vicieux ; ils démontrent le postulatum d'Euclide en s'appuyant sur une de ses conséquences plus ou moins dissimulée. D'autres objections, que M. Barbarin est encore bien bon de discuter, sont insoutenables tout de suite. Certains ont ainsi, prétendu qu'un nombre *abstrait* pouvant déterminer une fraction d'angle droit, et par suite, un triangle équilatéral du plan non euclidien, la longueur égale au côté de ce triangle se trouvait déterminée sans considération d'unité de mesure.

Ils n'ont pas vu, par malheur, qu'un plan non euclidien donné avait un certain paramètre propre qui intervenait comme donnée concrète.

Le dernier chapitre discute la forme géométrique de notre univers. Nous n'en savons à peu près rien et pour nos sens grossiers la géométrie euclidienne semble être celle qui est physiquement vraie.

Des observations astronomiques très précises sont entreprises un peu partout pour déterminer les coordonnées exactes des nébuleuses. Ce n'est peut-être que le jour où l'on connaîtra d'une façon précise les rapports géométriques des immenses distances de ces amas stellaires qu'on pourra en déduire quelque chose de précis sur la nature de l'espace.

Et si jamais il nous était révélé que cet espace ne soit pas euclidien et que la lumière décrit des droites non-euclidiennes on sera dans l'alternative de recourir à la géométrie générale ou de conserver la géométrie ordinaire en admettant que la lumière ne marche pas en ligne droite. Cette dernière façon de procéder ne paraît pas répugner à M. Poincaré.

Une pareille discussion est oiseuse à l'heure actuelle et risque de le rester longtemps encore. Espérons seulement que géomètres et physiciens sauront se mettre d'accord le jour où elle deviendra plus positive.

A. Buhl (Paris).

Cantor (Moritz). — **Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.** Dritter Band. Zweite Auflage. Fascicules 2 et 3 (1700-1758). B. G. Teubner, Leipzig [1], 1901.

Comme le poète, M. Moritz Cantor peut prononcer son *Exegi monumentum* puisque ces deux fascicules terminent l'édition *recensita et aucta* de sa magistrale histoire des mathématiques dont nous allons résumer rapidement les dernières pages.

Après avoir discuté la question de priorité entre Leibniz et Newton, au sujet de la découverte du calcul infinitésimal, l'auteur aborde l'œuvre de Jacques Bernouilli qui précisa les notions émises par Pascal et Fermat sur les probabilités et qui mit entre les mains des mathématiciens le précieux instrument du calcul exponentiel. De son côté Montmort, dans son *Essai sur les jeux de hasard*, donna des formules pour la sommation de certaines suites entre autres celle qui permet de représenter la somme de n termes d'une série dont les différences finissent par s'annuler.

Notons ensuite les noms de Taylor et d'Abraham de Maivre dont les travaux sont étudiés avec grand soin par l'érudit professeur de Heidelberg.

---

[1] Voir *L'Enseignement Mathématique*, III^e année, n° 1 (15 janvier 1901) et n° 6 (15 novembre 1901) pour le compte rendu des volumes précédents.

Puis c'est au tour du *System of fluxions* de Maclaurin, « un chef-d'œuvre », au dire de Lagrange. On remarque entre autres dans cet ouvrage la formule au moyen de laquelle on développe une fonction quelconque selon les puissances entières et croissantes de la variable.

En plusieurs endroits des *Vorlesungen* sont relatées les importantes découvertes d'Euler (1707-1783) que sa *Methodus inveniendi lineas curvas* (1744), son *Introductio in Analysin infinitorum* (1748) et ses *Institutiones calculi differentialis* (1755) placent au tout premier rang. On lui doit la solution générale du problème des isopérimètres et la théorie des intégrales dites « eulériennes ». Il imagina d'autre part l'identification des fonctions circulaires et des fonctions exponentielles, apporta de multiples perfectionnements à l'étude des séries et à celle des fonctions elliptiques en apercevant la comparabilité d'un arc d'hyperbole à la somme de deux arcs d'ellipse. En établissant d'une façon définitive de nombreuses méthodes générales, il rénova également la géométrie analytique (discussion de l'équation générale du second degré à 3 variables, formules de transformations des coordonnées dans l'espace, classification des courbes géométriques en ordres, classes et genres, etc.). Enfin Euler introduisit dans les formules trigonométriques les abréviations dont nous nous servons aujourd'hui en désignant les angles d'un triangle par A, B, C et les côtés opposés par les lettres minuscules correspondantes a, b, c. Cette énumération ne donne du reste qu'une bien faible idée de la prodigieuse fécondité du savant qui, selon l'expression de Lacroix « ne perdait pas un seul de ses calculs ».

Signalons au passage le Suisse Cramer dont l'*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* est aussi estimée que rare et le Français Alexis Clairaut qui, par la profondeur de ses recherches, contribua utilement au progrès mathématique et dont les *Eléments de Géométrie et d'Algèbre* demeurèrent longtemps classiques.

M. Moritz Cantor consacre son dernier chapitre à d'Alembert dont le *Traité de Dynamique* fit « époque dans la mécanique ». On y rencontre, en effet, une méthode générale permettant de ramener toutes les lois du mouvement à des questions d'équilibre. Il suffit d'exprimer que les forces qui meuvent le système considéré équilibrent les forces qui déplaceraient les particules de l'ensemble indépendamment les unes des autres et quelle que soit la façon dont s'opère la translation. Enfin dans ses huit volumes d'*Opuscules mathématiques* d'Alembert aborda nombre de sujets de science pure ou d'astronomie.

Jacques Boyer (Paris).

Claro Cornelio Dassen. — **Metafisica de los conceptos fundamentales** (espacio, tiempo, cantidad, limite) y del analisis llamado infinitesimal. Tesis para optar al titulo de Doctor en Ciencias Fisico-matematicas. Buenos-Ayres, 1901.

La Mathématique est une science subjectivo-objective. Elle puise de la nature quelques-uns de ses concepts; mais aussi elle se développe, moyennant une rigoureuse série de déductions, de quelques principes de logique. Son but est d'établir la juste correspondance entre les données empiriques et les hypothèses idéales. Cela a fait la continuelle affaire des mathématiciens parmi lesquels on compte beaucoup de métaphysiciens.

La thèse de M. Dassen vise notamment au côté de la métaphysique. Ce côté de la science n'est-il pas ordinairement celui qui fait l'objet des mathématiciens qui préfèrent enrichir leur science de nouveaux développements que d'applications utiles réduites à la résolution de nouveaux problèmes.

La métaphysique sort du cadre de la Mathématique, malgré que celle-ci se nourrit des principes de celle-là.

La lutte de l'intelligence pour dévoiler les secrets de la nature s'est continuée dès avant Platon et Aristoteles, et malgré de si grands efforts nous en avons appris très peu de choses. L'entreprise de M. Dassen est donc dans ce cas. Il veut notamment améliorer l'établissement des principes du calcul infinitésimal.

L'infini échappe à nos intuitions ; nous ne pouvons le connaître que d'une manière indirecte moyennant notre raison, et son étude s'est réduite à expliquer les antinomies qu'il offre dans beaucoup de résultats bizarres. Cela arrive à presque toutes les questions métaphysiques qui n'ont pas un parfait accord, et qui malgré cela ont fait l'objet principal de l'intelligence humaine.

Il n'est pas surprenant que M. Dassen trouve un motif de critique des premiers pas faits par Newton, Leibniz, Dalembert, Carnot, etc. et qu'il cherche les améliorations dues aux mathématiciens modernes.

M. Dassen puise beaucoup de conséquences de l'*Allgemeine Functionentheorie* de M. Du Bois-Reymond, dans sa controverse de l'idéaliste et de l'empiriste, adoptant la conclusion que *les quantités du monde interne ne sont pas toujours mathématiques, mais quand elles le sont,* elles sont linéaires, d'après le sens de Du Bois-Reymond. Il fait le développement progressif de l'idée de quantité mathématique, qui est comprise dans la bibliographie qui forme les ouvrages d'Argand, Bellavitis, Grassmann, Hamilton, etc.

A l'empiriste et à l'idéaliste, M. Dassen ajoute l'idéaliste atomiste, qui admet la moindre valeur, ou *atome*, de la quantité, avant son annullement. Il expose et critique les diverses acceptions du concept de la limite mathématique. Il cite les améliorations dues à Hamilton, Grassmann, Dedekind, Weierstrass sur les règles du calcul et distingue les fonctions avec des limites connues, de celles ayant des limites hypothétiques, quoique existantes ; il adopte la définition de Du Bois-Reymond et étudie son existence dans certains cas, suivant l'étude de cet analiste dans les vues idéaliste et empiriste, pour s'occuper des fonctions convergentes et divergentes.

Les points de convergence de diverses classes le conduisent aux *pantaquies* et *apantaquies* de Du Bois-Reymond, au concept de *dénombrement* et à celui du *continuum*.

La bibliographie de cette théorie forme les ouvrages de Cantor, Grassmann, Weierstrass, Gauss, Cauchy, Dini, Heine, Tannery, Du Bois-Reymond, etc.

La deuxième partie de l'ouvrage de M. Dassen traite de *l'analyse infinitésimale.*

M. Dassen, partisan de la théorie empiriste, qui raisonne toujours sur des quantités finies, combat la doctrine de l'idéaliste, sur les infiniment petits des divers ordres.

Il fait consister la métaphysique du calcul différentiel dans ce que nous voyons dans les traités usuels, c'est-à-dire, dans la substitution, dans un rapport des quantités par d'autres qui en diffèrent respectivement de quantités infiniment petites par rapport aux quantités primitives. Il juge ce point résolu par les travaux de Duhamel, Freycinet et Du Bois-Reymond. En éliminant les infiniment petits d'ordre inférieur, les équations inexactes provisoirement deviendront à la fin exactes par leur passage à la limite.

C'est un malentendu de M. Dassen que de rendre équivalent le principe de M. Cantor : que *la puissance du continu des nombres dans la droite, égale celle du plan et de l'espace*, à l'absurdité que *le nombre des points existant dans une droite égale ceux du plan et de l'espace*, ou sophisme, d'après l'expression de M. Dassen.

Lorsqu'on étudie les puissances des ensembles non dénombrables, on peut négliger sans inconvénient un ensemble dénombrable d'éléments. Les ensembles dénombrables jouent par rapport aux autres, le même rôle que les infiniment petits vis-à-vis des quantités finies (1).

L'ensemble de tous les nombres pairs a *même puissance* que l'ensemble de tous les nombres entiers. L'ensemble des nombres pairs est une *partie* de l'ensemble des nombres entiers et cependant a même puissance que celui-ci (2). L'ensemble de tous les nombres algébriques réels a même puissance que l'ensemble des nombres entiers positifs.

Puisqu'à chaque nombre du premier ensemble ont peut faire correspondre un nombre et un seul du second, la partie serait donc égale au tout. Cette objection repose sur une analogie inexacte. Le théorème qui dit que la partie est plus petite que le tout, n'est plus valable quand il s'agit des grandeurs en nombre infini (3).

M. Dassen termine sa thèse en exprimant les conditions qu'il faut remplir pour que la science d'un objet soit exacte. Il s'occupe de la substitution des objets idéaux aux objets réels, des données expérimentales, de la logique qui les combine, compare le rôle de l'expérience dans les sciences exactes, dans la Mathématique idéale, et termine en exprimant les bienfaits mutuels de l'expérience et de l'analyse.

Z. G. de Galdeano.

Kitt (Mor.). — **Grundlinien der politischen Arithmetik.** Un vol. relié, de 78 p. avec une table de 38 p.: prix : mk 3. — B.-G. Teubner, Leipzig, 1901.

Dans sa préface, l'auteur déclare que les ouvrages analogues publiés jusqu'alors, lui semblent présenter deux inconvénients. D'une part ils sont écrits bien plus pour le maître que pour l'élève; de l'autre ils embrassent un champ dépassant de beaucoup ce qu'on peut faire dans les écoles ; c'est donc là ce qu'il a cherché à éviter.

Ce petit volume donne, sous une forme très condensée, les notions d'algèbre financière généralement enseignées dans les écoles supérieures de commerce (*Handelsakademien*) qui sont les suivantes : intérêts composés, annuités, rentes, plans d'amortissements, rentes viagères, assurances sur la vie.

---

(1) Borel. *Leçons sur la théorie des fonctions* (p. 14).

(2) *Id.* (p. 7).

(3) Klein. *Leçons sur certaines questions de géométrie élémentaire.*

M. Kitt suit une marche très uniforme : brève exposition du sujet, étude du problème théorique, applications pouvant donner lieu à des remarques intéressantes ; enfin exercices à résoudre. Tout en évitant les développements purement théoriques et les problèmes par trop particuliers, il s'efforce pourtant d'être aussi complet que possible.

Ce petit manuel est accompagné d'une table contenant : I. Les logarithmes de $\left(1 + \frac{\text{taux}}{100}\right)$, de 1/4 p. 100 à 10 p. 100. — II. Les puissances 1 à 50 des mêmes nombres. — III. Un tableau des différentes tables de mortalité. — IV. Les tables fondamentales pour le calcul des rentes viagères et des assurances sur la vie, aux taux de 3 1/2 p. 100 et 4 p. 100.

En somme, cet ouvrage constitue un excellent manuel, pour tous ceux, qui, sans vouloir les approfondir, désirent se mettre au courant des éléments de la théorie des opérations financières.

Henri Duaime (Genève).