Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1902)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES DES RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE

Autor: Laisant, C.-A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5584

SUR LA SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES

DES RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE

---

1. — L'évaluation de la somme dont il s'agit est de la plus grande importance pour le calcul des fonctions symétriques. Aussi, ce problème est-il devenu classique. Il est résolu dans la plupart des Traités d'Algèbre et figure dans les programmes de nombreux concours.

Invariablement, croyons-nous, le calcul de la somme des puissances semblables, pour des exposants entiers, se fait au moyen des formules de Newton, qui permettent d'obtenir les sommes successives par récurrence. Le moyen n'est assurément pas mauvais, mais il n'en serait pas moins intéressant de donner directement une expression analytique de chacune des sommes cherchées, sans faire intervenir les autres, et de pouvoir indiquer également un procédé de calcul direct. C'est ce qu'il est facile de faire, et ce qui a été fait (car nous ne prétendons pas apporter ici rien de nouveau); mais, en dépit de la simplicité de la méthode, elle semble, du moins en France, n'avoir pas pénétré dans l'enseignement; et c'est ce qui nous engage à publier la présente note; nous avons l'espoir qu'elle pourra intéresser quelques professeurs de Mathématiques spéciales.

2. — Soit $f(x) = 0$ une équation algébrique de degré m, dont les racines sont a_1, a_2,... a_m. Appelons en général S_p la somme $\sum_{i=1}^{i=m} a_i^p$, l'exposant p pouvant prendre une valeur entière quelconque, positive ou négative.

Formons la dérivée logarithmique $\frac{f'(x)}{f(x)} = -\varphi(x)$ du premier membre de l'équation. Nous avons l'identité

$$-\varphi(x) = \sum \frac{1}{x - a_i}$$

Par dérivations successives, nous en déduisons

$$-\varphi'(x) = -\sum \frac{1}{(x - a_i)^2},$$

$$-\varphi''(x) = 2\sum \frac{1}{(x - a_i)^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\varphi^{(p)}(x) = (-1)^p p! \sum \frac{1}{(x - a_i)^{p+1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si, dans ces identités, nous venons à faire $x = 0$, il s'ensuit que nous avons d'une façon générale, pour toute valeur entière positive de p,

$$\varphi^{(p)}(0) = p! \sum \frac{1}{a_i^{p+1}} = p! S_{-(p+1)},$$

ou

$$S_{-(p+1)} = \frac{\varphi^{(p)}(0)}{p!},$$

ou encore

(1) $$S_{-p} = \frac{\varphi^{(p-1)}(0)}{(p-1)!}.$$

Considérons maintenant l'équation aux inverses des racines, $g(x) = 0$; sa dérivée logarithmique est

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = -\gamma(x) = \sum \frac{1}{x - \frac{1}{a_i}},$$

et de là, en répétant textuellement ce que nous venons de dire plus haut, nous déduirons

(2) $$S_p = \frac{\gamma^{(p-1)}(0)}{(p-1)!}.$$

Les formules (1) et (2) résolvent la question proposée. En outre, nous avons $S_1 = \gamma(0)$, $S_{-1} = \varphi(0)$.

On peut rappeler que la fonction $g(x)$ n'est autre que $x^m f\left(\frac{1}{x}\right)$, de sorte que $\gamma(x) = \frac{1}{x^2}\frac{f'\frac{1}{(x)}}{f\frac{1}{(x)}} - \frac{m}{x}$.

3. — Si nous développons les fonctions $\varphi(x)$, $\gamma(x)$ suivant la série de Maclaurin, nous avons

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + x^2\frac{\varphi''(0)}{2!} + \ldots + x^p\frac{\varphi^{(p)}(0)}{p!} + \ldots,$$

$$\gamma(x) = \gamma(0) + x\gamma'(0) + x^2\frac{\gamma''(0)}{2!} + \ldots + x^p\frac{\gamma^{(p)}(0)}{p!} + \ldots,$$

c'est-à-dire, en vertu de ce qui précède,

$$\varphi(x) = S_{-1} + S_{-2}x + S_{-3}x^2 + \ldots + S_{-(p+1)}x^p + \ldots,$$

$$\gamma(x) = S_1 + S_2 x + S_3 x^2 + \ldots + S_{p+1}x^p + \ldots,$$

Or, ces développements s'obtiennent simplement par division, en ordonnant les polynômes suivant les puissances croissantes de la variable. Par conséquent, la division de $-f'(x)$ par $f(x)$ en ordonnant le quotient suivant les puissances croissantes, donnera, comme coefficients de ce quotient, toutes les sommes S_{-p}; et pareillement, la division de $-g'(x)$ par $g(x)$ donnera les sommes S_p.

4. — En partant de là, on peut très simplement retrouver les formules de Newton.

Soit en effet

$$f(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots\ldots + A_{m-1}x + A_m,$$

d'où

$$g(x) = A_0 + A_1x + \ldots\ldots + A_{m-1}x^{m-1} + A_mx^m.$$

Pour obtenir les S_p successives, il faut faire la division de $-g'(x)$ par $g(x)$. Or, par le mécanisme même de l'opération, il est visible que le premier terme du quotient ne peut dépendre que de A_0 et A_1 ; le deuxième, que de A_0, A_1, A_2; et, en général, le p^e, de $A_0, A_1, \ldots A_p$.

Par conséquent, pour le calcul de la somme S_p, on peut substituer à l'équation $f(x) = 0$ toute autre qui aurait les mêmes coefficients A_0, A_1, A_2,... A_p, En particulier, par exemple, pour le calcul respectif de S_1, S_2,... S_p, on pourra considérer les équations

$$\begin{aligned}
&A_0x + A_1 = 0,\\
&A_0x^2 + A_1x + A_2 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_0x^p + A_1x^{p-1} + \ldots + A_p = 0,
\end{aligned}$$

et les résultats seront les mêmes.

Or, la substitution des racines, dans les équations précédentes, suivie de l'addition des premiers membres, donne immédiatement les identités

$$\begin{aligned}
&A_0S_1 + A_1 = 0,\\
&A_0S_2 + A_1S_1 + 2A_2 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_0S_p + A_1S_{p-1} + \ldots + pA_p = 0,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire précisément les formules récurrentes de Newton. Nous supposons, naturellement, que p ne surpasse pas m.

On a évidemment aussi

$$\begin{aligned}
&A_mS_{-1} + A_{m-1} = 0,\\
&A_mS_{-2} + A_{m-1}S_{-1} + 2A_{m-2} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_mS_{-p} + A_{m-1}S_{-(p-1)} + \ldots + pA_{m-p} = 0.
\end{aligned}$$

C.-A. LAISANT.