Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1902)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'INFINI ET L'INDÉFINI DANS LES CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

Autor: Bonnel, J.-F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5581

L'INFINI ET L'INDÉFINI

DANS LES

CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

Les constructions géométriques, faites avec la règle et le compas, paraissent susceptibles d'une extension, qui se présente naturellement à l'esprit, dès qu'on remplace l'opération graphique matérielle par une opération mentale et fictive. Rien n'est plus logique que cette extension, si le géomètre n'envisage que l'indéfini, c'est-à-dire l'indéfiniment grand ou l'indéfiniment petit ; mais si, comme cela arrive souvent, il fait intervenir l'infini dans cette extension, la conclusion n'est rien moins que certaine ; elle se réduit presque toujours à l'expression d'une contre-vérité évidente.

Il y a effectivement trois sortes d'état pour une grandeur variable : le fini, l'indéfini et l'infini. Une ligne, par exemple, est dite *finie*, si elle s'étend à partir d'un point jusqu'à une certaine extrémité. Elle est dite *indéfinie*, si elle peut augmenter ou diminuer, à partir d'un de ses points, autant qu'on le veut, sans cesser d'avoir une extrémité. Elle est dite *infinie*, si elle n'est pas finie, ni indéfinie, le mot infini ayant ainsi un sens purement négatif par rapport aux deux autres.

Le fini est fourni par l'expérience ; du fini à l'indéfini, le rapport est facile à saisir, l'imagination y suffit, puisque l'indéfini n'est qu'une variété du fini ; mais il n'en est pas de même pour l'infini, l'expérience et l'imagination sont incapables de nous représenter ce qui n'a point d'extrémité, et c'est par un acte de la raison seule que nous concevons cet état d'une ligne qui est plus petite que tout ce qu'on peut imaginer d'indéfiniment petit ou plus grande que tout ce qu'on peut imaginer d'indéfiniment grand.

Cela posé, examinons ce qui en résulte sur quelques exemples simples.

Construisez un cercle de rayon fini ; rien n'empêche d'en construire un autre qui ait un rayon plus grand ou plus petit, et même d'en imaginer un qui ait un rayon indéfiniment grand ou indéfiniment petit. Mais, si vous supposez que le rayon devienne infiniment grand ou infiniment petit, le cercle disparaît absolument, il n'y a pas de cercle possible qui ait un rayon infini ou un rayon nul : on exprime cet anéantissement du cercle en disant qu'il s'est transformé en ligne droite ou qu'il s'est réduit à un point; mais cette manière de parler n'en est pas moins une contradiction formelle de la définition du cercle.

Regardez une droite d'une certaine distance, vous la voyez sous un angle qui est déterminé par les deux rayons visuels menés de l'œil aux extrémités de la droite; si la droite s'éloigne, en restant perpendiculaire à l'un des rayons visuels, l'angle diminue, et, si l'on imagine qu'elle s'éloigne indéfiniment, ce qui est permis, l'angle diminue indéfiniment. De là, à admettre que l'angle devient nul, lorsque la droite est supposée s'éloigner à l'infini, il n'y a qu'un pas à faire et qu'on fait sans hésitation, bien qu'il soit avéré que deux droites, partant du même point et faisant entre elles un angle nul, restent confondues en une seule et même droite dans toute leur étendue.

Vous divisez avec le compas une longueur donnée en deux parties égales, puis l'une des parties en deux autres, et ainsi de suite; il est clair qu'on peut obtenir ainsi des parties aussi petites qu'on le veut, il suffit de répéter l'opération, en pensée ou en acte, autant de fois qu'il est nécessaire. Mais est-il possible d'arriver de la sorte à une partie infiniment petite c'est-à-dire de longueur nulle, comme on serait tenté de l'admettre ? Évidemment non ; car, si l'on parvenait à trouver au bout du compas mental une partie de longueur nulle, l'autre, qui lui est égale, serait aussi de longueur nulle, et les deux parties qui forment ensemble la dernière partie divisée donneraient un total de longueur nulle ; l'avant-dernière aurait de même une longueur nulle, et, en remontant la série des opérations, on trouverait que toutes les lignes divisées, jusqu'à la première, seraient de longueur nulle ; ce qui est absurde.

Voici un autre exemple, où l'extension à l'infini conduit à une conclusion qui n'est guère moins paradoxale. Considérons un triangle quelconque, et joignons le milieu de sa base au milieu de chacun des autres côtés ; nous aurons formé deux triangles partiels, dans lesquels la somme des quatre côtés, autres que leur base, est égale à la somme des deux côtés du triangle considéré. En répétant la même construction sur les deux triangles partiels, on en formera quatre autres plus petits, dans lesquels la somme des huit côtés, autres que leur base, est encore égale à celle des deux côtés du triangle considéré ; en continuant ainsi indéfiniment, il est clair qu'on pourra obtenir un nombre indéfini de triangles partiels de plus en plus petits, dans lesquels la même propriété sera encore vraie. Mais, si l'on veut étendre la construction à l'infini, on devra dire que les côtés des triangles partiels deviennent nuls à l'infini, qu'ils se réduisent à des points, se confondant avec les points de labase du triangle considéré, et, par suite, que la base du triangle considéré est égale à la somme de ses deux autres côtés ; ce qui est une contrevérité manifeste.

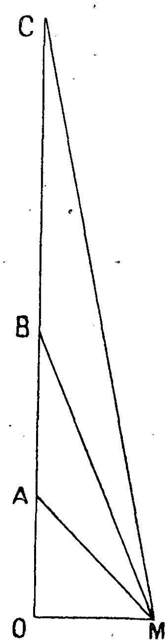

Fig. 1.

Je citerai encore un cas, qui a donné lieu, dans ces dernières années, à des développements extraordinaires. Soit un triangle isocèle MOA, dont OM est la base; prolongeons le côté OA d'une longueur AB égale à l'hypoténuse AM, et menons l'oblique MB ; prolongeons de même le côté OB d'une longueur BC égale à l'hypoténuse BM, et menons l'oblique MC ; et ainsi de suite. Il est clair que rien ne s'oppose à ce que cette construction, au moins par la pensée, soit continuée indéfiniment; on obtiendra ainsi une suite indéfinie de triangles, de plus en plus grands, ayant pour base commune OM et pour sommets les points A, B, C,... Les angles au sommet de ces triangles sont de plus en plus petits, et l'on peut dire même qu'ils vont en diminuant indéfiniment ; mais peuvent-ils diminuer infiniment, autrement dit, l'un d'eux peut-il devenir nul, ainsi que l'ont supposé quelques géomètres ? Une telle supposition n'est pas admissible ; en effet, si l'un de ces angles, C par exemple, devenait nul, l'angle BMC qui lui est égal, puisque le triangle CBM est isocèle, d'après la construction, serait nul aussi; or, l'angle BMC ne peut être nul qu'à la condition que les deux droites, MB et MC, qui partent du même point M, se confondent en une seule et même droite, et, si ces deux droites n'en font qu'une, elles doivent rencontrer OC sous le même angle; donc, si l'angle C est nul, l'angle B l'est également, et, en remontant la série des opérations qu'on a faites, il faut que toutes les obliques menées du point M fassent avec OC des angles nuls; ce qui est absurde.

Les propositions de ce genre abondent dans la géométrie; on en trouve aussi dans le calcul des séries, qui est l'image décolorée d'une construction géométrique. Cauchy a dit d'ailleurs, dans ses *Leçons de physique générale*, que « c'est précisément pour avoir admis l'existence de séries composées d'un nombre infini de termes que de très habiles géomètres ont été plusieurs fois conduits à des résultats inexacts ».

Considérons les deux séries : $1 + 3 + 5 + \ldots$ et $2 + 4 + 6 + \ldots$, leurs sommes sont différentes, si on les considère avec le même nombre fini de termes; quelque grand que soit ce nombre, la seconde surpasse toujours la première, et d'autant plus que le nombre des termes est plus grand. Mais, si l'on étend à l'infini cette conclusion, la proposition n'a plus de sens; car, on reconnaît facilement, dans ce cas, que chacune des sommes est plus grande ou plus petite que l'autre et même que sa moitié, son tiers, son quart, etc., suivant la manière dont on groupe et compare leurs termes; ce qui est manifestement absurbe.

Les deux séries que nous venons de considérer sont divergentes. Soit maintenant la série convergente : $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots.$ Si l'on suppose que le nombre des termes y est fini, on sait qu'elle donne une valeur approchée de $l2$, et d'autant plus approchée que le nombre des termes y est plus grand, de telle sorte qu'on peut dire que la valeur exacte de cette série indéfinie a pour limite $l2$. Mais, si l'on suppose que le nombre des termes y est infini, cette conclusion n'est plus acceptable; en effet, on voit aisément qu'en additionnant, après les quatre premiers termes, les cinq termes positifs suivants, on trouve pour leur somme a une quantité plus grande que $1/3$; de même, en additionnant les quinze termes positifs suivants, on trouve une somme b plus grande que $1/3$; puis, pour les quarante-cinq termes positifs suivants, une somme c plus grande que $1/3$, et ainsi de suite. La série, dotée d'un nombre infini de termes, équivaut donc à celle-ci :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \left(a - \frac{1}{6}\right) + \left(b - \frac{1}{8}\right) + \left(c - \frac{1}{10}\right) + \cdots\cdots$$

Or, les parties $a - \frac{1}{6}$, $b - \frac{1}{8}$, $c - \frac{1}{10}$,... sont en nombre infini, et chacune d'elles est plus grande que $1/6$, puisque $a, b, c, \ldots$ sont plus grands que $1/3$; il en résulte que la série considérée croît sans limite; ce qui contredit la première conclusion.

En résumé, l'absurdité qu'on rencontre, dans les constructions géométriques et dans les séries de nombres, lorsqu'on les étend à l'infini, provient de deux causes : premièrement, de la confusion qu'on fait couramment de l'indéfiniment petit avec zéro et de l'indéfiniment grand avec l'infini; secondement, de ce fait, qu'on oublie ou qu'on ignore, savoir qu'une construction géométrique peut toujours atteindre les dernières limites de l'indéfini, mais l'infini et le zéro jamais. Au fond, le passage de l'indéfini à l'infini ou à zéro reste tellement mystérieux qu'il nous paraîtrait sage de supprimer partout, dans l'enseignement des mathématiques élémentaires, ces deux termes d'infini et de zéro, qui ne correspondent à aucune idée positive, ni précise, et qui d'ailleurs ne sont nullement indispensables.

J.-F. BONNEL (Lyon).