Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1902)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE CALCUL DES QUATERNIONS

Autor: Daniëls, Fr.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5579

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 28.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LE CALCUL DES QUATERNIONS

Le calcul des quaternions, dont l'exposé ordinaire, tel qu'il a été donné par son inventeur Sir Rowan Hamilton, a un caractère assez abstrait (1), peut être établi d'une manière simple, en partant de certaines relations bien connues (2) de vecteurs qui seront d'abord rappelées dans les paragraphes 1 à 5.

1. La somme des vecteurs A, B, C,.... ou somme géométrique possède les mêmes propriétés qu'une somme algébrique : elle est associative et commutative. En représentant par \mathcal{A} la longueur de A, par \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_3 les longueurs de ses composantes parallèles à trois axes rectangulaires xyz, formant un système droit (ox vers l'est, oy vers le nord, oz vers le zénith), on aura

$$A = \mathcal{A}_1 i + \mathcal{A}_2 j + \mathcal{A}_3 k$$

si i, j, k sont des vecteurs-unité dans les trois axes.

2. L'expression scalaire

$$\mathcal{A}_1 \mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_2 \mathcal{B}_2 + \mathcal{A}_3 \mathcal{B}_3 \equiv \mathcal{A} \mathcal{B} \cos (AB)$$

formée des deux vecteurs A et B, est simplement désignée par AB et nommée produit scalaire ou interne de ces deux vecteurs. Cette définition nous fournit immédiatement :

$$(3) AB = BA$$

(4)
$$AA = A^{2} = \mathcal{N}_{1}^{2} + \mathcal{N}_{2}^{2} + \mathcal{N}_{3}^{2} = \mathcal{N}^{2}$$

⁽¹⁾ P.-G. Tait dans son Traité élémentaire des Quaternions (I, p. 66) appelle le raisonnement de Hamilton « presque métaphysique », et O. Heaviside (Electrical Papers, vol. II, p. 528) trouve que the quaternion (as)... fundamental idea... renders the establishment of the algebra of vectors without metaphysics a very difficult matter.

⁽²⁾ O. HEAVISIDE, Electrical Papers, vol. II, p. 528-533.

(5)
$$AB + AC + \dots = A(B + C + \dots)$$

(6)
$$(A + D) (B + C) = AB + AC + DB + DC$$

AB = o lorsque A est perpendiculaire à B;

$$ii = jj = kk = 1$$
; $ij = jk = ki = 0$.

Le produit scalaire est donc commutatif (3) et distributif (6) comme un produit ordinaire.

3. Le vecteur

$$(7) \quad (\mathcal{A}_{2}\,\mathcal{B}_{3}\,-\,\mathcal{A}_{3}\,\mathcal{B}_{2})\;i\,+\,(\mathcal{A}_{3}\,\mathcal{B}_{1}\,-\,\mathcal{A}_{1}\,\mathcal{B}_{3})\,j\,+\,(\mathcal{A}_{1}\,\mathcal{B}_{2}\,\dot{-}\,\mathcal{A}_{2}\,\mathcal{B}_{1})\,k$$

formé de A et B est représenté par VAB et nommé produit vectoriel ou externe de ces deux vecteurs. Il est perpendiculaire à A, car son produit scalaire par A, formé d'après l'équation (2), est égal à zéro; il est de même perpendiculaire à B, tandis que le carré de sa longueur, calculé d'après (4), devient:

$$\begin{split} (\mathcal{A}_2\,\mathcal{B}_3 - \mathcal{A}_3\,\mathcal{B}_2)^2 + (\mathcal{A}_3\,\mathcal{B}_4 - \mathcal{A}_4\,\mathcal{B}_3)^2 + (\mathcal{A}_1\,\mathcal{B}_2 - \mathcal{A}_2\,\mathcal{B}_4)^2 \\ & \equiv (\mathcal{A}_1{}^2 + \mathcal{A}_2{}^2 + \mathcal{A}_3{}^2)\,(\mathcal{B}_1{}^2 + \mathcal{B}_2{}^2 + \mathcal{B}_3{}^2) - (\mathcal{A}_1\,\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_2\,\mathcal{B}_2 + \mathcal{A}_3\,\mathcal{B}_3)^2 \\ & \equiv \mathcal{A}^2\,\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}^2\,\mathcal{B}^2\,\cos^2\left(\mathrm{AB}\right) \equiv \mathcal{A}^2\,\mathcal{B}^2\,\sin^2\left(\mathrm{AB}\right). \end{split}$$

La longueur elle-même est donc $AB\sin(AB)$, et quant à la direction, l'on voit facilement que A, B et VAB forment un système droit, car en prenant i et j au lieu de A et B, on trouve k pour le produit vectoriel. La définition donnée par (7) nous fournit maintenant les relations suivantes :

$$VAB = -VBA$$

$$VAA = 0$$

$$(10) \qquad \text{VAB} + \text{VAC} + \dots = \text{VA} (B + C + \dots)$$

$$(II) \qquad V(A + D)(B + C) = VAB + VAC + VDB + VDC$$

$$(12) Vij = k Vjk = i Vki = j$$

Le produit vectoriel est donc distributif comme un produit ordinaire (11); mais il n'est pas commutatif (8).

4. Le produit scalaire CVAB des deux vecteurs C et VAB est d'après (2) et (7)

$$\mathfrak{S}_{\scriptscriptstyle 1}\,(\mathbb{A}_{\scriptscriptstyle 2}\,\mathbb{B}_{\scriptscriptstyle 3}\,-\,\mathbb{A}_{\scriptscriptstyle 3}\,\mathbb{B}_{\scriptscriptstyle 2})\,+\,\mathfrak{S}_{\scriptscriptstyle 2}\,(\mathbb{A}_{\scriptscriptstyle 3}\,\mathbb{B}_{\scriptscriptstyle 1}\,-\,\mathbb{A}_{\scriptscriptstyle 1}\,\mathbb{B}_{\scriptscriptstyle 3})\,+\,\mathfrak{S}_{\scriptscriptstyle 3}\,(\mathbb{A}_{\scriptscriptstyle 1}\,\mathbb{B}_{\scriptscriptstyle 2}\,-\,\mathbb{A}_{\scriptscriptstyle 2}\,\mathbb{B}_{\scriptscriptstyle 1})$$

e met el III e de est

ou égal au déterminant,

$$\mid \mathfrak{S}_{1} \mathfrak{A}_{2} \mathfrak{B}_{3} \mid ;$$

il s'ensuit que

$$CVAB = AVBC = BVCA.$$

Si les trois vecteurs sont dans un même plan — coplanaires — A peut s'écrire mB + nC et l'on aura

(14)
$$AVBC = (mB + nC) VBC = mBVBC + nCVBC = 0.$$

5. Le produit vectoriel VCVAB de C et VAB contient d'après (7) six termes. Nous n'en écrivons que deux :

$$\begin{split} & [\mathcal{C}_2 \left(\mathcal{A}_1 \, \mathcal{B}_2 - \mathcal{A}_2 \, \mathcal{B}_1 \right) - \mathcal{C}_3 \left(\mathcal{A}_3 \, \mathcal{B}_1 - \mathcal{A}_1 \, \mathcal{B}_3 \right)] \, i + [-] \, j + [-] \, k \\ & \equiv \left[\left(\mathcal{B}_1 \, \mathcal{C}_1 + \mathcal{B}_2 \, \mathcal{C}_2 + \mathcal{B}_3 \, \mathcal{C}_3 \right) \, \mathcal{A}_1 - \left(\mathcal{A}_1 \, \mathcal{C}_1 + \mathcal{A}_2 \, \mathcal{C}_2 + \mathcal{A}_3 \, \mathcal{C}_3 \right) \, \mathcal{B}_1 \right] i \\ & \qquad \qquad + [-] \, j + [-] \, k, \end{split}$$

Le premier, le troisième et le cinquième ensemble donnent

$$(\mathcal{B}_{\scriptscriptstyle 1}\hspace{-.05cm}\ominus_{\scriptscriptstyle 1}+\mathcal{B}_{\scriptscriptstyle 2}\hspace{-.05cm}\ominus_{\scriptscriptstyle 2}+\mathcal{B}_{\scriptscriptstyle 3}\hspace{-.05cm}\ominus_{\scriptscriptstyle 3})\,(\mathbb{A}_{\scriptscriptstyle 1}\hspace{-.05cm}i+\mathbb{A}_{\scriptscriptstyle 2}\hspace{-.05cm}j+\mathbb{A}_{\scriptscriptstyle 3}\hspace{-.05cm}k)$$

ou

tandis que les trois autres fournissent

$$-\left(\mathbb{A}_{1}\mathbb{S}_{1}+\mathbb{A}_{2}\mathbb{S}_{2}+\mathbb{A}_{3}\mathbb{S}_{3}\right)\left(\mathbb{B}_{1}i+\mathbb{B}_{2}j+\mathbb{B}_{3}k\right)$$

ou

Il est donc

$$(15) VCVAB = A.BC - B.CA$$

et conséquemment

$$VCVAB + VAVBC + VBVCA = 0.$$

6. Quaternions. — En supposant (fig. 1) que les deux vecteurs R et R' aient la même longueur R, et que A₁ soit un vecteur-unité perpendiculaire à leur plan, nous voyons (§ 3) que la longueur de VA₁R aussi sera égale à R, et comme R' est la somme des vecteurs OP et OQ, nous aurons

$$R' = \cos \theta . R + \sin \theta . VA . R$$

ce que nous écrirons encore

$$(\cos \theta + \sin \theta VA_1)R$$

ou

$$(\cos \theta + \sin \theta \, \overline{A_1}) \, R.$$

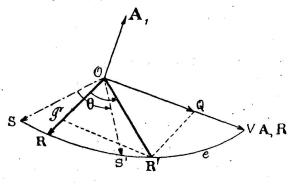


Fig. 1.

De la même manière l'on trouverait S' égal à

$$\cos \theta.S + \sin \theta.VA_1S$$

ou

$$(\cos \theta + \sin \theta \overline{A_1}) S.$$

Le multiplicateur

$$\cos \theta + \sin \theta \overline{A_1}$$

change R en R' et S en S', c'est-à-dire il tourne tout vecteur dans le plan e ou dans un plan parallèle d'un angle θ autour du vecteur-unité A_1 dans le sens indiqué, sans en changer la longueur. Il est évident que l'opérateur

$$m(\cos\theta + \sin\theta \overline{A_1})$$

fait, tout en tournant d'un angle θ , la longueur m fois plus grande. Cet opérateur-là est un quaternion q;

$$\cos \theta + \sin \theta \overline{A_1}$$

en est le « verseur » Uq; m en est le « tenseur » Tq.

Réciproquement, comme

$$(\overline{a} + \overline{A}) R \equiv (a + AVA_1) R \equiv \sqrt{\overline{a^2 + A^2}} \left[\frac{a}{\sqrt{\overline{a^2 + A^2}}} + \frac{A}{\sqrt{\overline{a^2 + A^2}}} \overline{A_1} \right] R$$

$$(17) \qquad \equiv \sqrt{\overline{a^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_4^2}} \left(\cos \theta + \sin \theta \overline{A_1} \right) R$$

l'opérateur $a + \overline{A}$ est un quaternion, dont le tenseur

$$Tq = \sqrt{a^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

et dont le verseur

$$Uq = \cos \theta + \sin \theta \overline{A}_1$$

l'angle θ étant déterminé par

$$\cos\theta = a : \sqrt{a^2 + A^2}$$

et

$$\sin\theta = \mathcal{A}: \sqrt{a^2 + \mathcal{A}^2}.$$

La « partie scalaire » Sq en est a, la « partie vectorielle » Vq en est \overline{A} . Il est entièrement déterminé par les quatre quantités a, A_4 , A_2 , A_3 ; c'est de là que vient son nom.

L'égalité de deux quaternions implique aussi bien celle de leurs parties scalaires que celle de leurs parties vectorielles et réciproquement.

7. Le multiplicateur

$$m\left[\cos\left(-\theta\right)+\sin\left(-\theta\right)\overline{\mathbf{A}_{1}}\right]$$

ou

$$m\left[\cos\theta-\sin\theta\,\overline{\mathrm{A}_{1}}\right]$$

qui tourne d'un angle — θ est appelé le quaternion conjugué Kq de

$$m \left[\cos \theta + \sin \theta \overline{A}_{1}\right].$$

tandis que

$$\frac{1}{m} \left[\cos \theta - \sin \theta \overline{A_1} \right]$$

en est le quaternion inverse q^{-i} . Il est évident que les deux opérations q et Kq effectuées sur le vecteur R n'auront d'autre résultat que d'en faire la longueur m^2 fois plus grande :

$$Kq.q = m^2 = q.Kq$$

¹ Le V employé ici pour la partie vectorielle d'un quaternion est différent de celui employé pour le produit vectoriel de deux vecteurs.

tandis que les opérations q, et q^{-1} effectuées successivement ne changeront rien au vecteur :

$$q^{-1} \cdot q = 1 = q \cdot q^{-1}$$

Il existe en outre la relation

$$Kq = (Tq)^2 \cdot q^{-1}$$
.

8. Addition. — Les deux quaternions

$$p \equiv m_1 \left(\cos \theta + \sin \theta \overline{A}_1 \right) \equiv a + \overline{A}$$

et

$$q = m_2 \left(\cos \varphi + \sin \varphi \,\overline{\,{
m B}_{\scriptscriptstyle 1}}\right) \equiv b \,+\,\overline{\rm B}$$

peuvent agir sur la droite commune à leurs plans, et la figure a fait voir que pR = R' et qR = R'', donc

$$pR + qR \equiv (p + q)R = R' + R'' = R''' = (q + p)R.$$

Nous en concluons d'abord, que p+q=q+p et ensuite, que

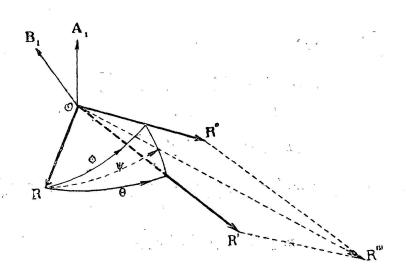


Fig. 2.

cette somme est équivalente à un nouveau quaternion, tournant d'un angle ψ tout vecteur dans le plan (RR'''). A ce nouveau quaternion peut être ajouté un troisième

$$r \equiv c + \overline{C};$$

l'ensemble sera alors équivalent à un quatrième quaternion

$$a+b+c+\overline{A+B+C}$$

ကြည်သည် အသိအတွင် သို့ ကိုအမည်သည်သည်။ ပြို့စေခဲ့ ကြာလည်း **မေး**ကို **မေး**ကိုမ်းနောက်သို့ **အော**င်

et comme

$$p + q + r = r + q + p = (p + q) + r = p + (q + r)$$

l'addition des quaternions est aussi bien commutative qu'associative.

9. Multiplication. - Pour faire coıncider (fig. 3) le vecteur Ro

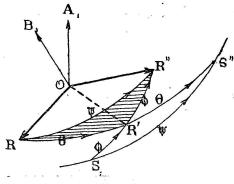


Fig. 3.

avec R", nous pouvons d'abord lui appliquer le multiplicateur ou verseur

$$\cos \theta + \sin \theta \, \overline{A_1}$$

c'est-à-dire le tourner d'un angle θ autour de « l'axe » Λ_1 , ensuite par le verseur

$$\cos \phi + \sin \phi \, \overline{B_1}$$

le faire tourner d'un angle φ autour de B_i , mais nous pouvons aussi directement lui appliquer le multiplicateur

$$\cos \psi + \sin \psi \overline{D_1};$$

où D_i est un vecteur-unité normal au plan passant par R et R'', et ψ l'angle que font entre eux ces deux vecteurs. Le « produit » des deux premiers verseurs est donc un nouveau verseur, et le produit des deux quaternions

$$p = a + \overline{A}$$

et

$$q = b + \overline{B}$$

un nouveau quaternion dont l'expression se déduit de :

$$qp R = (b + \overline{B})(a + \overline{A}) R = (b + VB)(aR + VAR)$$

= $abR + aVBR + bVAR + VBVAR$.

Les identités (16) et (15) permettent de substituer au dernier terme d'abord

et ensuite

$$-AB.R + AR.B - VRVBA$$
,

ce qui, A étant normal à R et AR zéro, se réduit à

nous trouvons donc

$$qpR = (ab - AB)R + aVBR + bVAR - VRVBA$$

$$\equiv (ab - AB + \overline{aB + bA + VBA})R$$
et

$$qp = ab - AB + \overline{aB + bA + VBA}.$$

Les deux premiers termes forment la partie scalaire, les trois derniers la partie vectorielle du nouveau quaternion. A cause du dernier terme, pq n'est pas égal à qp : la multiplication n'est pas commutative, ce qui se voit d'ailleurs facilement par la figure 3. En effet, en appliquant au vecteur S successivement les opérateurs q et p, nous obtenons d'abord R' et ensuite S"; pq est donc équivalent à un quaternion opérant dans le plan SOS", qui est différent du plan ROR", dans lequel opère qp.

Considérons maintenant (fig. 4) trois quaternions p, q, r opérant dans les plans V_4 , V_2 , V_3 . Le second faisant coïncider le vecteur S avec S_4 , nous aurons

$$S_1 = qS;$$

de même

$$S_2 = pS_1$$

et conséquemment

$$S_2 = pqS$$
.

Il en résulte que pq opère dans le plan V_4 , et qu'il peut saire coı̈ncider S_4 avec S_5 , pourvu que les arcs (SS_2) et (S_4S_5) soient égaux. On aura donc aussi

$$S_5 = pqS_4$$

ensuite

$$S_4 = rS_3$$

et enfin

 $S_{\mathfrak{s}} = pq.rS_{\mathfrak{z}}.$

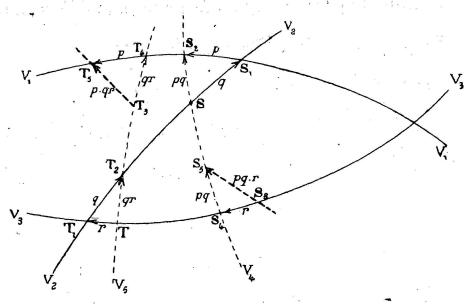


Fig. 4.

Par un raisonnement analogue, nous trouvons

$$T_1 = rT$$
, $T_2 = qT_1$

et

$$T_2 = qrT$$

donc

$$T_4 = qrT_3, \quad T_5 = pT_4$$

et enfin

$$T_{5} = p.qrT_{3}.$$

Les équations (19) et (20) nous montrent que pq. r et p. qr sont des quaternions, qui opèrent dans les plans (S_3S_5) et (T_3T_5) , et pour que la multiplication soit associative pq. r=p. qr, il nous faudrait démontrer que les quatre vecteurs $S_3S_5T_3T_5$ sont dans un même plan, et que les arcs (S_3S_5) et (T_3T_5) sont égaux, ce que Hamilton fait e.a. en employant certaines propriétés des coniques sphériques. Mais nous pouvons aussi démontrer l'égalité des parties scalaires et celle des parties vectorielles pour les deux quaternions pq. r et p. qr en question.

. Tribingo

En effet

$$S_2 = pqS = (ab - AB + \overline{aB + bA + VAB}) S$$

$$S_5 = pqS_4 = pq.rS_3 = (ab - AB + \overline{aB + bA + VAB}) (c + \overline{C}) S_3$$

ce qui, multiplié d'après (18), donne pour la partie scalaire

$$(21) Spq.r = abc - (c.AB + a.BC + b.CA) - CVAB$$

tandis que la partie vectorielle

$$(ab - AB) \overline{C} + c \overline{(aB + bA + VAB)} + \overline{V (aB + bA + VAB) C}$$

dont le dernier terme est

ou (15)

$$-BC.\overline{A} + CA.\overline{B}$$

peut s'écrire

$$Vpq.r = (bc - BC)\overline{A} + (ca + CA)\overline{B} + (ab - AB)\overline{C} + a\overline{VBC} - b\overline{VCA} + c\overline{VAB}$$
(22)

Pour le produit p. qr nous trouvons

$$T_5 = pT_4 = p.qrT_3 = (a + \overline{A}) (bc - BC + \overline{bC + cB + VBC}) T_3.$$

Les parties scalaires et vectorielles en sont les mêmes que celles de pq. r. D'une manière analogue, on prouve que la multiplication est distributive : p(q+r) = pq + pr. Un produit de quaternions n'est donc pas commutatif, mais, en dehors de cela, il possède les propriétés d'un produit ordinaire.

10. Si les composantes rectangulaires de A et B sont $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3$, l'équation (18) devient :

$$\begin{split} qp &= ab - \mathbb{A}_{1}\mathbb{B}_{1} - \mathbb{A}_{2}\mathbb{B}_{2} - \mathbb{A}_{3}\mathbb{B}_{3} + [b\mathbb{A}_{1} + a\mathbb{B}_{1} + \mathbb{B}_{2}\mathbb{A}_{3} - \mathbb{B}_{3}\mathbb{A}_{2}]\,\dot{t} \\ &+ [b\mathbb{A}_{2} + a\mathbb{B}_{2} + \mathbb{B}_{3}\mathbb{A}_{1} - \mathbb{B}_{4}\mathbb{A}_{3}]\,\dot{\overline{f}} + [b\mathbb{A}_{3} + a\mathbb{B}_{3} + \mathbb{B}_{4}\mathbb{A}_{2} - \mathbb{B}_{2}\mathbb{A}_{4}]\,\dot{\overline{k}} \end{split}$$

La formule du produit (18) nous permet de démontrer quelques relations importantes :

$$\mathbf{K}qp = \mathbf{K}p \cdot \mathbf{K}q$$

et généralement ill mana bij é ince a libra landade di bit militar e

$$Kp_1p_2...p_n = Kp_nKp_{n-1}...Kp_1.$$

En effet, en changeant (§ 6) le signe de la partie vectoriellé, (18) nous donne

$$Kqp \equiv ab - AB - a\overline{B} - b\overline{A} - \overline{VBA};$$

-tandis que

$$Kp \cdot Kq = (a - \overline{A}) (b - \overline{B}) \equiv ab - AB - \overline{aB} - \overline{bA} + \overline{VAB}$$

Nous avons donc

$$Kqp = Kp$$
. Kq

et de même

$$Kq_1q_2 \dots q_n = K(q_2 \dots q_n) \cdot Kq_1 = K(q_3q_4 \dots q_n) \cdot Kq_2 \cdot Kq_1$$

$$= \dots = Kq_n \cdot Kq_{n-1} \cdot Kq_{n-2} \dots Kq_1$$

$$Sqp = Spq$$

et en général

$$\operatorname{S}_{q_1q_2...q_lq_{l+1}...q_n} = \operatorname{S}_{q_{l+1}...q_nq_1...q_l}$$

car, comme la partie scalaire en (18) ne change pas lorsqu'on intervertit l'ordre des quaternions, nous avons d'abord Sqp = Spq et ensuite, pourvu qu'on garde le même ordre cyclique

$$Sq_1q_2...q_n = S(q_1...q_l)(q_{l+1}...q_n) = S(q_{l+1}...q_n)(q_1...q_l)$$

= $Sq_{l+1}q_{l+2}...q_nq_1q_2...q_l$.

c) Lorsque $p = m (\cos \theta + \sin \theta \overline{A}_1)$ l'équation (18) donne

$$pp \equiv p^2 = m^2 \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta\overline{A}_1\right) \equiv m^2 \left(\cos 2\theta + \sin 2\theta\overline{A}_1\right)$$

et généralement, quand r est un nombre entier positif

$$p^r = m^r \left(\cos r\theta + \sin r\theta \overline{\mathbf{A}_1}\right)$$

Il en résulte

$$\left(\cos\frac{\pi}{2m}+\sin\frac{\pi}{2m}\,\overline{\mathrm{A}_{1}}\right)^{m}=\overline{\mathrm{A}_{1}},$$

ce qui conduit tout naturellement à la convention

$$\cos\frac{\pi}{2m} + \sin\frac{\pi}{2m} \,\overline{\mathbf{A}}_{1} \equiv \overline{\mathbf{A}}_{1}^{\frac{1}{m}}$$

et

$$\cos\frac{n}{m}\cdot\frac{\pi}{2} + \sin\frac{n}{m}\cdot\frac{\pi}{2}\,\overline{\Lambda}_1 = \overline{\Lambda}_1^{\frac{n}{m}}$$

Cette dernière formule permet d'identifier un verseur quelconque à une puissance de son vecteur-unité.

11. Division. — Comme $q(q^{-1}p)$ ou $(qq^{-1})p$ est équivalent au quaternion p, il est tout naturel d'appeler $q^{-1}p$ le quotient de p par q, pour lequel on pourra encore écrire $\frac{p}{q}$, pourvu qu'on se rappelle constamment que cette fraction est $q^{-1}p$ et non pas pq^{-1} . Sa valeur $(\S 7)$ est

$$q^{-1}p \doteq \frac{1}{b^2 + \mathfrak{B}^2} (b - \overline{B}) (a A) + \frac{1}{b^2 + \mathfrak{B}^2} (ab + AB + \overline{bA} - aB - \overline{VBA})$$

Il est maintenant facile d'interpréter une fraction, dont le numérateur et le dénominateur sont des fonctions entières des quaternions p, q, r, \ldots

- 12. Vecteurs. Quaternions élémentaires. Un quaternion se réduit à un vecteur \overline{A} (quaternion élémentaire), quand sa partie scalaire est zéro, c'est-à-dire quand son angle est droit. Les règles trouvées pour les quaternions s'appliquent encore à ces vecteurs. Nous allons nous conformer, dans la suite, à la notation la plus répandue des quaternionistes qui représentent $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \ldots$ par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ leurs tenseurs par $\overline{A}, \overline{A}, \overline{A}, \ldots$, les vecteurs-unité $\overline{A}, \overline{A}, \overline{A$
- a) Ce qui a été trouvé pour l'addition des quaternions permet de conclure, que la somme des vecteurs $\alpha, \beta, \gamma...$ est un nouveau vecteur, qu'on trouve en les composant comme des forces données; cette somme est associative et commutative.

b) Pour les produits de deux vecteurs α et β , qui font entre eux l'angle θ , l'équation (18) nous donne

(23)
$$\alpha\beta = -AB + \overline{VAB} \qquad \beta\alpha = -AB + \overline{VBA}$$

Leurs scalaires sont égales :

$$S\alpha\beta = S\beta\alpha$$

avec la valeur commune — $T\alpha$. $T\beta$. $\cos \theta$. Leurs parties vectorielles diffèrent par le signe :

$$V\alpha\beta = -V\beta\sigma$$

le premier membre de (25) est $T\alpha$ $T\beta$ sin θ . i', si i' est un vecteur-unité perpendiculaire à α et β , tel que α , β , i' forment un système droit. On a évidemment encore

$$(26) \alpha\beta + \beta\alpha = 2S\alpha\beta$$

et

$$(27) \alpha\beta - \beta\alpha = 2V\alpha\beta.$$

La partie scalaire $S\alpha\beta = o$, lorsque α est perpendiculaire à β ; la partie vectorielle $V\alpha\beta = o$, lorsque α est parallèle à β .

- c) Pour le carré d'un vecteur, les équations (23) fournissent : $\alpha^2 = -(T\alpha)^2$; donc, pour le carré d'un vecteur-unité, quel qu'il soit 1. Il est donc $i^2 = -1$; $i^3 \equiv i^2 \cdot i = -i$, etc.
- d) Pour le produit $\alpha\beta\gamma$ de trois vecteurs, l'on trouve d'après (21) et (22)

$$S\alpha\beta\gamma = -CVAB$$

et

$$V_{\alpha\beta\gamma} = -BC.\overline{A} + CA.\overline{B} - AB.\overline{C}$$

Il en résulte

(28)
$$S\alpha\beta\gamma = S\beta\gamma\alpha = S\gamma\alpha\beta$$

et

$$(29) V\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha + \gamma S\alpha\beta.$$

Le premier membre de la dernière équation peut s'écrire

$$V\alpha (S\beta\gamma + V\beta\gamma)$$

ou

$$\alpha.S\beta\gamma + V\alpha V\beta\gamma$$
,

de sorte que

(30)
$$V\alpha V\beta \gamma = -\beta S\gamma \alpha + \gamma S\alpha \beta$$

ce qui, lorsqu'on y substitue le vecteur $\mathbf{V}\delta\epsilon$ au lieu de α , nous montre que

(31)
$$VV\delta\epsilon V\beta\gamma = -\beta S\gamma (\delta\epsilon - S\delta\epsilon) + \gamma S(\delta\epsilon - S\delta\epsilon) \beta = -\beta S\gamma \delta\epsilon + \gamma S\delta\epsilon\beta$$

e) Enfin, nous avons d'après (§ 10, a) et (§ 7)

$$K\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n = K\alpha_n K\alpha_{n-1}\ldots K_2 K_1$$

ou

$$K\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n = (-1)^n \alpha_n\alpha_{n-1}...\alpha_1\alpha_2$$

ce qui peut s'écrire

$$S\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n-V\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n=(-1)^n\left[S\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1+V\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1\right]$$

Il en résulte les deux équations :

$$(32) S\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n = (-1)^n S\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1$$

et i

(33)
$$Va_1a_2...a_n = (-1)^{n-1} Va_n a_{n-1}...a_1$$

dont (24) et (25) ne sont que des cas spéciaux.

Les équations (24 — 33) suffisent pour les nombreuses applications du calcul des quaternions.

M. Fr. Daniels, Fribourg (Suisse).