**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 4 (1902)
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LE CALCUL DES QUATERNIONS
**Autor:** Daniëls, Fr.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-5579

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 07.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# SUR LE CALCUL DES QUATERNIONS

Le calcul des quaternions, dont l'exposé ordinaire, tel qu'il a été donné par son inventeur Sir Rowan HAMILTON, a un caractère assez abstrait [1], peut être établi d'une manière simple, en partant de certaines relations bien connues [2] de vecteurs qui seront d'abord rappelées dans les paragraphes 1 à 5.

1. La somme des vecteurs A, B, C,..... ou somme géométrique possède les mêmes propriétés qu'une somme algébrique : elle est associative et commutative. En représentant par $\mathcal{A}$ la longueur de A, par $\mathcal{A}_1$ $\mathcal{A}_2$ $\mathcal{A}_3$ les longueurs de ses composantes parallèles à trois axes rectangulaires $xyz$, formant un système droit ($ox$ vers l'est, $oy$ vers le nord, $oz$ vers le zénith), on aura

$$A = \mathcal{A}_1 i + \mathcal{A}_2 j + \mathcal{A}_3 k \tag{1}$$

si $i, j, k$ sont des vecteurs-unité dans les trois axes.

2. L'expression *scalaire*

$$\mathcal{A}_1 \mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_2 \mathcal{B}_2 + \mathcal{A}_3 \mathcal{B}_3 \equiv \mathcal{A}\mathcal{B} \cos (AB) \tag{2}$$

formée des deux vecteurs A et B, est simplement désignée par AB et nommée *produit scalaire* ou *interne* de ces deux vecteurs. Cette définition nous fournit immédiatement :

$$AB = BA \tag{3}$$

$$AA \equiv A^2 = \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_3^2 = \mathcal{A}^2 \tag{4}$$

---

[1] P.-G. TAIT dans son *Traité élémentaire des Quaternions* (I, p. 66) appelle le raisonnement de Hamilton « presque métaphysique », et O. HEAVISIDE (*Electrical Papers*, vol. II, p. 528) trouve que *the quaternion* (*as*)... *fundamental idea... renders the establishment of the algebra of vectors without metaphysics a very difficult matter.*

[2] O. HEAVISIDE, *Electrical Papers*, vol. II, p. 528-533.

(5) $$AB + AC + \ldots\ldots = A(B + C + \ldots\ldots)$$

(6) $$(A + D)(B + C) = AB + AC + DB + DC$$

$AB = 0$ lorsque A est perpendiculaire à B ;

$$ii = jj = kk = 1 ; \qquad ij = jk = ki = 0.$$

Le produit scalaire est donc commutatif (3) et distributif (6) comme un produit ordinaire.

3. Le *vecteur*

(7) $$(\mathcal{A}_2 \mathcal{B}_3 - \mathcal{A}_3 \mathcal{B}_2)\, i + (\mathcal{A}_3 \mathcal{B}_1 - \mathcal{A}_1 \mathcal{B}_3)\, j + (\mathcal{A}_1 \mathcal{B}_2 - \mathcal{A}_2 \mathcal{B}_1)\, k$$

formé de A et B est représenté par VAB et nommé *produit vectoriel* ou *externe* de ces deux vecteurs. Il est perpendiculaire à A, car son produit scalaire par A, formé d'après l'équation (2), est égal à zéro ; il est de même perpendiculaire à B, tandis que le carré de sa longueur, calculé d'après (4), devient :

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}_2 \mathcal{B}_3 - \mathcal{A}_3 \mathcal{B}_2)^2 + (\mathcal{A}_3 \mathcal{B}_1 - \mathcal{A}_1 \mathcal{B}_3)^2 + (\mathcal{A}_1 \mathcal{B}_2 - \mathcal{A}_2 \mathcal{B}_1)^2 \\ \equiv (\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_3^2)(\mathcal{B}_1^2 + \mathcal{B}_2^2 + \mathcal{B}_3^2) - (\mathcal{A}_1 \mathcal{B}_1 + \mathcal{A}_2 \mathcal{B}_2 + \mathcal{A}_3 \mathcal{B}_3)^2 \\ \equiv \mathcal{A}^2 \mathcal{B}^2 - \mathcal{A}^2 \mathcal{B}^2 \cos^2(AB) \equiv \mathcal{A}^2 \mathcal{B}^2 \sin^2(AB).\end{aligned}$$

La longueur elle-même est donc $\mathcal{A}\mathcal{B}\sin(AB)$, et quant à la direction, l'on voit facilement que A, B et VAB forment un système droit, car en prenant $i$ et $j$ au lieu de A et B, on trouve $k$ pour le produit vectoriel. La définition donnée par (7) nous fournit maintenant les relations suivantes :

(8) $$VAB = - VBA$$

(9) $$VAA = 0$$

(10) $$VAB + VAC + \ldots\ldots = VA(B + C + \ldots\ldots)$$

(11) $$V(A + D)(B + C) = VAB + VAC + VDB + VDC$$

(12) $$Vij = k \qquad Vjk = i \qquad Vki = j$$

Le produit vectoriel est donc distributif comme un produit ordinaire (11) ; mais il n'est pas commutatif (8).

4. Le produit *scalaire* CVAB des deux vecteurs C et VAB est d'après (2) et (7)

$$\mathcal{C}_1 (\mathcal{A}_2 \mathcal{B}_3 - \mathcal{A}_3 \mathcal{B}_2) + \mathcal{C}_2 (\mathcal{A}_3 \mathcal{B}_1 - \mathcal{A}_1 \mathcal{B}_3) + \mathcal{C}_3 (\mathcal{A}_1 \mathcal{B}_2 - \mathcal{A}_2 \mathcal{B}_1)$$

ou égal au déterminant

$$| \mathcal{C}_1 \mathcal{A}_2 \mathcal{B}_3 | ;$$

il s'ensuit que

$$\text{(13)} \qquad \mathrm{CVAB} = \mathrm{AVBC} = \mathrm{BVCA}.$$

Si les trois vecteurs sont dans un même plan — coplanaires — A peut s'écrire $m\mathrm{B} + n\mathrm{C}$ et l'on aura

$$\text{(14)} \qquad \mathrm{AVBC} = (m\mathrm{B} + n\mathrm{C})\ \mathrm{VBC} = m\mathrm{BVBC} + n\mathrm{CVBC} = 0.$$

5. Le produit *vectoriel* VCVAB de C et VAB contient d'après (7) six termes. Nous n'en écrivons que deux :

$$\begin{aligned}&[\mathcal{C}_2(\mathcal{A}_1\mathcal{B}_2 - \mathcal{A}_2\mathcal{B}_1) - \mathcal{C}_3(\mathcal{A}_3\mathcal{B}_1 - \mathcal{A}_1\mathcal{B}_3)]\,i + [-]\,j + [-]\,k \\ &\quad \equiv [(\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1 + \mathcal{B}_2\mathcal{C}_2 + \mathcal{B}_3\mathcal{C}_3)\,\mathcal{A}_1 - (\mathcal{A}_1\mathcal{C}_1 + \mathcal{A}_2\mathcal{C}_2 + \mathcal{A}_3\mathcal{C}_3)\,\mathcal{B}_1]\,i \\ &\qquad\qquad + [-]\,j + [-]\,k,\end{aligned}$$

Le premier, le troisième et le cinquième ensemble donnent

$$(\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1 + \mathcal{B}_2\mathcal{C}_2 + \mathcal{B}_3\mathcal{C}_3)\,(\mathcal{A}_1 i + \mathcal{A}_2 j + \mathcal{A}_3 k)$$

ou

$$\mathrm{BC.A},$$

tandis que les trois autres fournissent

$$-(\mathcal{A}_1\mathcal{C}_1 + \mathcal{A}_2\mathcal{C}_2 + \mathcal{A}_3\mathcal{C}_3)\,(\mathcal{B}_1 i + \mathcal{B}_2 j + \mathcal{B}_3 k)$$

ou

$$-\mathrm{AC.B}.$$

Il est donc

$$\text{(15)} \qquad \mathrm{VCVAB} = \mathrm{A.BC} - \mathrm{B.CA}$$

et conséquemment

$$\text{(16)} \qquad \mathrm{VCVAB} + \mathrm{VAVBC} + \mathrm{VBVCA} = 0.$$

6. *Quaternions.* — En supposant (fig. 1) que les deux vecteurs R et R′ aient la même longueur $\mathcal{R}$, et que $\mathrm{A}_1$ soit un vecteur-unité perpendiculaire à leur plan, nous voyons (§ 3) que la longueur de $\mathrm{VA}_1\mathrm{R}$ aussi sera égale à $\mathcal{R}$, et comme R′ est la somme des vecteurs OP et OQ, nous aurons

$$\mathrm{R}' = \cos\theta.\mathrm{R} + \sin\theta.\mathrm{VA}_1\mathrm{R}$$

ce que nous écrirons encore

$$(\cos\theta + \sin\theta\, VA_1)\,R$$

ou

$$(\cos\theta + \sin\theta\, \overline{A_1})\,R.$$

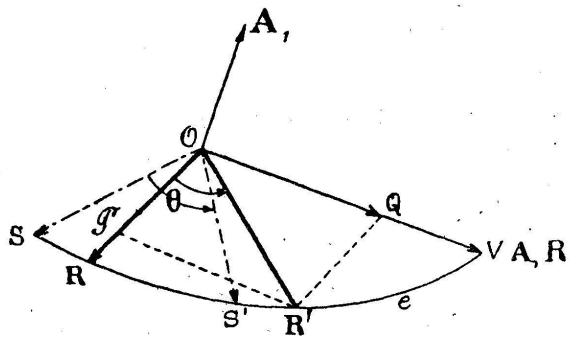


Fig. 1.

De la même manière l'on trouverait S′ égal à

$$\cos\theta . S + \sin\theta . VA_1 S$$

ou

$$(\cos\theta + \sin\theta\, \overline{A_1})\,S.$$

Le multiplicateur

$$\cos\theta + \sin\theta\, \overline{A_1}$$

change R en R′ et S en S′, c'est-à-dire il tourne *tout* vecteur dans le plan $e$ ou dans un plan parallèle d'un angle θ autour du vecteur-unité $A_1$ dans le sens indiqué, sans en changer la longueur. Il est évident que l'opérateur

$$m\,(\cos\theta + \sin\theta\, \overline{A_1})$$

fait, tout en tournant d'un angle θ, la longueur $m$ fois plus grande. Cet opérateur-là est un quaternion $q$ ;

$$\cos\theta + \sin\theta\, \overline{A_1}$$

en est le « verseur » $Uq$ ; $m$ en est le « tenseur » $Tq$.

Réciproquement, comme

$$(\overline{a} + \overline{A})\,R \equiv (a + \mathcal{A}VA_1)\,R \equiv \sqrt{a^2 + \mathcal{A}^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + \mathcal{A}^2}} + \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{a^2 + \mathcal{A}^2}}\overline{A_1}\right]R$$

$$(17) \qquad \equiv \sqrt{a^2 + \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_4^2}\,(\cos\theta + \sin\theta\, \overline{A_1})\,R$$

l'opérateur $a + \overline{A}$ est un quaternion, dont le tenseur

$$Tq = \sqrt{a^2 + \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + \mathcal{A}_3^2}$$

et dont le verseur

$$Uq = \cos\theta + \sin\theta\,\overline{A_1},$$

l'angle $\theta$ étant déterminé par

$$\cos\theta = a : \sqrt{a^2 + \mathcal{A}^2}$$

et

$$\sin\theta = \mathcal{A} : \sqrt{a^2 + \mathcal{A}^2}.$$

La « partie scalaire » $Sq$ en est $a$, la « partie vectorielle[1] » $Vq$ en est $\overline{A}$. Il est entièrement déterminé par les quatre quantités $a$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ ; c'est de là que vient son nom.

L'égalité de deux quaternions implique aussi bien celle de leurs parties scalaires que celle de leurs parties vectorielles et réciproquement.

7. Le multiplicateur

$$m\left[\cos(-\theta) + \sin(-\theta)\,\overline{A_1}\right]$$

ou

$$m\left[\cos\theta - \sin\theta\,\overline{A_1}\right]$$

qui tourne d'un angle $-\theta$ est appelé le quaternion conjugué $Kq$ de

$$m\left[\cos\theta + \sin\theta\,\overline{A_1}\right].$$

tandis que

$$\frac{1}{m}\left[\cos\theta - \sin\theta\,\overline{A_1}\right]$$

en est le quaternion inverse $q^{-1}$. Il est évident que les deux opérations $q$ et $Kq$ effectuées sur le vecteur R n'auront d'autre résultat que d'en faire la longueur $m^2$ fois plus grande :

$$Kq.q = m^2 = q.Kq$$

[1] Le V employé ici pour la partie vectorielle d'un quaternion est différent de celui employé pour le produit vectoriel de deux vecteurs.

tandis que les opérations $q$ et $q^{-1}$ effectuées successivement ne changeront rien au vecteur :

$$q^{-1}.q = 1 = q.q^{-1}.$$

Il existe en outre la relation

$$Kq = (Tq)^2 . q^{-1}.$$

8. *Addition.* — Les deux quaternions

$$p \equiv m_1 (\cos \theta + \sin \theta \overline{A_1}) \equiv a + \overline{A}$$

et

$$q = m_2 (\cos \varphi + \sin \varphi \overline{B_1}) \equiv b + \overline{B}$$

peuvent agir sur la droite commune à leurs plans, et la figure 2 fait voir que $pR = R'$ et $qR = R''$, donc

$$pR + qR \equiv (p + q) R = R' + R'' = R''' = (q + p) R.$$

Nous en concluons d'abord, que $p + q = q + p$ et ensuite, que

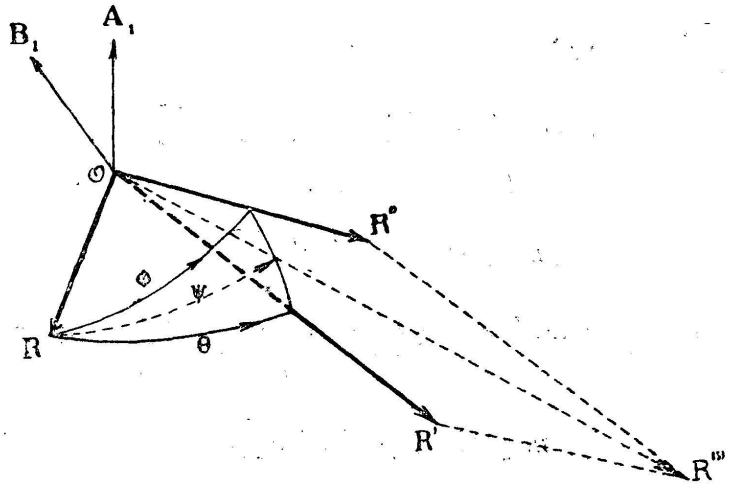


Fig. 2.

cette somme est équivalente à un nouveau quaternion, tournant d'un angle $\psi$ *tout* vecteur dans le plan (RR'''). A ce nouveau quaternion peut être ajouté un troisième

$$r \equiv c + \overline{C};$$

l'ensemble sera alors équivalent à un quatrième quaternion

$$a + b + c + \overline{A + B + C},$$

et comme

$$p + q + r = r + q + p = (p + q) + r = p + (q + r)$$

l'addition des quaternions est aussi bien commutative qu'associative.

9. *Multiplication.* — Pour faire coïncider (fig. 3) le vecteur R

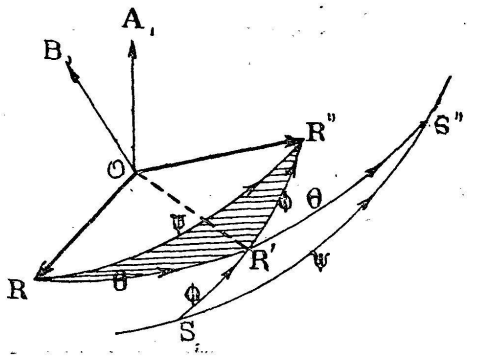


Fig. 3.

avec R'', nous pouvons d'abord lui appliquer le multiplicateur ou verseur

$$\cos\theta + \sin\theta\,\overline{A_1}$$

c'est-à-dire le tourner d'un angle $\theta$ autour de « l'axe » $A_1$, ensuite par le verseur

$$\cos\varphi + \sin\varphi\,\overline{B_1}$$

le faire tourner d'un angle $\varphi$ autour de $B_1$, mais nous pouvons aussi directement lui appliquer le multiplicateur

$$\cos\psi + \sin\psi\,\overline{D_1};$$

où $D_1$ est un vecteur-unité normal au plan passant par R et R'', et $\psi$ l'angle que font entre eux ces deux vecteurs. Le « produit » des deux premiers verseurs est donc un nouveau verseur, et le produit des deux quaternions

$$p = a + \overline{A}$$

et

$$q = b + \overline{B}$$

un nouveau quaternion dont l'expression se déduit de :

$$qp\,R = (b + \overline{B})(a + \overline{A})\,R = (b + VB)(aR + VAR)$$
$$= ab\,R + a\,VBR + b\,VAR + VBVAR.$$

Les identités (16) et (15) permettent de substituer au dernier terme d'abord

$$-\mathrm{VAVRB} - \mathrm{VRVBA}$$

et ensuite

$$-\mathrm{AB.R} + \mathrm{AR.B} - \mathrm{VRVBA},$$

ce qui, A étant normal à R et AR zéro, se réduit à

$$-\mathrm{AB.R} - \mathrm{VRVBA},$$

nous trouvons donc

$$qp\mathrm{R} = (ab - \mathrm{AB})\mathrm{R} + a\mathrm{VBR} + b\mathrm{VAR} - \mathrm{VRVBA}$$
$$\equiv (ab - \mathrm{AB} + \overline{a\mathrm{B} + b\mathrm{A} + \mathrm{VBA}})\,\mathrm{R}$$

et

$$qp = ab - \mathrm{AB} + \overline{a\mathrm{B} + b\mathrm{A} + \mathrm{VBA}}. \tag{18}$$

Les deux premiers termes forment la partie scalaire, les trois derniers la partie vectorielle du nouveau quaternion. A cause du dernier terme, $pq$ n'est pas égal à $qp$ : la multiplication n'est pas commutative, ce qui se voit d'ailleurs facilement par la figure 3. En effet, en appliquant au vecteur S successivement les opérateurs $q$ et $p$, nous obtenons d'abord R′ et ensuite S″ ; $pq$ est donc équivalent à un quaternion opérant dans le plan SOS″, qui est différent du plan ROR″, dans lequel opère $qp$.

Considérons maintenant (fig. 4) trois quaternions $p$, $q$, $r$ opérant dans les plans $V_1$, $V_2$, $V_3$. Le second faisant coïncider le vecteur S avec $S_1$, nous aurons

$$S_1 = qS;$$

de même

$$S_2 = pS_1$$

et conséquemment

$$S_2 = pqS.$$

Il en résulte que $pq$ opère dans le plan $V_4$, et qu'il peut faire coïncider $S_4$ avec $S_5$, pourvu que les arcs $(SS_2)$ et $(S_4S_5)$ soient égaux. On aura donc aussi

$$S_5 = pqS_4,$$

ensuite

$$S_4 = rS_3$$

et enfin

(19) $$S_5 = pq.rS_3.$$

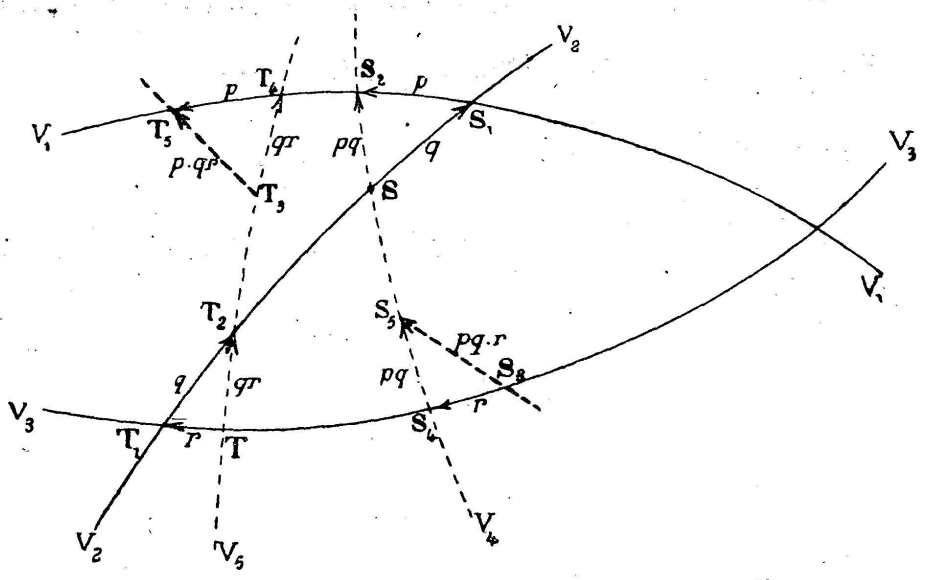


Fig. 4.

Par un raisonnement analogue, nous trouvons

$$T_1 = rT, \qquad T_2 = qT_1$$

et

$$T_2 = qrT$$

donc

$$T_4 = qrT_3, \qquad T_5 = pT_4$$

et enfin

(20) $$T_5 = p.qrT_3.$$

Les équations (19) et (20) nous montrent que $pq.r$ et $p.qr$ sont des quaternions, qui opèrent dans les plans $(S_3S_5)$ et $(T_3T_5)$, et pour que la multiplication soit associative $pq.r = p.qr$, il nous faudrait démontrer que les quatre vecteurs $S_3S_5T_3T_5$ sont dans un même plan, et que les arcs $(S_3S_5)$ et $(T_3T_5)$ sont égaux, ce que Hamilton fait *e. a.* en employant certaines propriétés des coniques sphériques. Mais nous pouvons aussi démontrer l'égalité des parties scalaires et celle des parties vectorielles pour les deux quaternions $pq.r$ et $p.qr$ en question.

En effet

$$S_2 = pqS = (ab - AB + \overline{aB + bA + VAB})\, S$$

$$S_5 = pqS_4 = pq.rS_3 = (ab - AB + \overline{aB + bA + VAB})\,(c + \overline{C})\, S_3$$

ce qui, multiplié d'après (18), donne pour la partie scalaire

(21) $$Spq.r = abc - (c.AB + a.BC + b.CA) - CVAB$$

tandis que la partie vectorielle

$$(ab - AB)\,\overline{C} + c\,\overline{(aB + bA + VAB)} + \overline{V\,(aB + bA + VAB)\,C}$$

dont le dernier terme est

$$-\overline{VCVAB}$$

ou (15)

$$-BC.\overline{A} + CA.\overline{B}$$

peut s'écrire

$$Vpq.r = (bc - BC)\,\overline{A} + (ca + CA)\,\overline{B} + (ab - AB)\,\overline{C}$$

(22) $$+ a\overline{VBC} - b\overline{VCA} + c\overline{VAB}$$

Pour le produit $p.\,qr$ nous trouvons

$$T_5 = pT_4 = p.qrT_3 = (a + \overline{A})\,(bc - BC + \overline{bC + cB + VBC})\,T_3.$$

Les parties scalaires et vectorielles en sont les mêmes que celles de $pq.\,r$. D'une manière analogue, on prouve que la multiplication est distributive : $p(q + r) = pq + pr$. Un produit de quaternions n'est donc pas commutatif, mais, en dehors de cela, il possède les propriétés d'un produit ordinaire.

10. Si les composantes rectangulaires de A et B sont $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3$, l'équation (18) devient :

$$qp = ab - \mathcal{A}_1\mathcal{B}_1 - \mathcal{A}_2\mathcal{B}_2 - \mathcal{A}_3\mathcal{B}_3 + [b\mathcal{A}_1 + a\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2\mathcal{A}_3 - \mathcal{B}_3\mathcal{A}_2]\,\overline{i}$$
$$+ [b\mathcal{A}_2 + a\mathcal{B}_2 + \mathcal{B}_3\mathcal{A}_1 - \mathcal{B}_1\mathcal{A}_3]\,\overline{j} + [b\mathcal{A}_3 + a\mathcal{B}_3 + \mathcal{B}_1\mathcal{A}_2 - \mathcal{B}_2\mathcal{A}_1]\,\overline{k}$$

La formule du produit (18) nous permet de démontrer quelques relations importantes :

*a*) $$Kqp = Kp.Kq$$

et généralement

$$\mathrm{K}p_1p_2\ldots p_n = \mathrm{K}p_n\mathrm{K}p_{n-1}\ldots \mathrm{K}p_1.$$

En effet, en changeant (§ 6) le signe de la partie vectorielle, (18) nous donne

$$Kqp = ab - \mathrm{AB} - a\overline{\mathrm{B}} - b\overline{\mathrm{A}} - \overline{\mathrm{VBA}};$$

tandis que

$$\mathrm{K}p.\mathrm{K}q = (a - \overline{\mathrm{A}})(b - \overline{\mathrm{B}}) \equiv ab - \mathrm{AB} - \overline{a\mathrm{B}} - \overline{b\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{VAB}}.$$

Nous avons donc

$$\mathrm{K}qp = \mathrm{K}p.\ \mathrm{K}q$$

et de même

$$\mathrm{K}q_1q_2\ldots q_n = \mathrm{K}(q_2\ldots q_n).\mathrm{K}q_1 = \mathrm{K}(q_3q_4\ldots q_n).\mathrm{K}q_2.\mathrm{K}q_1$$
$$= \ldots = \mathrm{K}q_n.\ \mathrm{K}q_{n-1}.\ \mathrm{K}q_{n-2}\ldots \mathrm{K}q_1$$

*b*) $$\mathrm{S}qp = \mathrm{S}pq$$

et en général

$$\mathrm{S}q_1q_2\ldots q_lq_{l+1}\ldots q_n = \mathrm{S}q_{l+1}\ldots q_nq_1\ldots q_l)$$

car, comme la partie scalaire en (18) ne change pas lorsqu'on intervertit l'ordre des quaternions, nous avons d'abord $\mathrm{S}qp = \mathrm{S}pq$ et ensuite, pourvu qu'on garde le même ordre cyclique

$$\mathrm{S}q_1q_2\ldots q_n = \mathrm{S}(q_1\ldots q_l)(q_{l+1}\ldots q_n) = \mathrm{S}(q_{l+1}\ldots q_n)(q_1\ldots q_l)$$
$$= \mathrm{S}q_{l+1}q_{l+2}\ldots q_nq_1q_2\ldots q_l.$$

*c*) Lorsque $p = m(\cos\theta + \sin\theta\,\overline{\mathrm{A}}_1)$ l'équation (18) donne

$$pp \equiv p^2 = m^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta\overline{\mathrm{A}}_1) \equiv m^2(\cos 2\theta + \sin 2\theta\overline{\mathrm{A}}_1)$$

et généralement, quand $r$ est un nombre entier positif

$$p^r = m^r(\cos r\theta + \sin r\theta\overline{\mathrm{A}_1})$$

Il en résulte

$$\left(\cos\frac{\pi}{2m} + \sin\frac{\pi}{2m}\,\overline{\mathrm{A}_1}\right)^m = \overline{\mathrm{A}_1},$$

ce qui conduit tout naturellement à la convention

$$\cos\frac{\pi}{2m} + \sin\frac{\pi}{2m}\,\overline{A}_1 \equiv \overline{A}_1^{\frac{1}{m}}$$

et

$$\cos\frac{n}{m}\cdot\frac{\pi}{2} + \sin\frac{n}{m}\cdot\frac{\pi}{2}\,\overline{A}_1 = \overline{A}_1^{\frac{n}{m}}$$

Cette dernière formule permet d'identifier un verseur quelconque à une puissance de son vecteur-unité.

11. *Division.*— Comme $q\,(q^{-1}p)$ ou $(qq^{-1})p$ est équivalent au quaternion $p$, il est tout naturel d'appeler $q^{-1}p$ le quotient de $p$ par $q$, pour lequel on pourra encore écrire $\frac{p}{q}$, pourvu qu'on se rappelle constamment que cette fraction est $q^{-1}p$ et non pas $pq^{-1}$. Sa valeur (§ 7) est

$$q^{-1}p = \frac{1}{b^2+\mathfrak{B}^2}(b-\overline{B})(a\ A)\overline{+} = \frac{1}{b^2+\mathfrak{B}^2}(ab+AB+\overline{bA-aB-VBA})$$

Il est maintenant facile d'interpréter une fraction, dont le numérateur et le dénominateur sont des fonctions entières des quaternions $p, q, r, \ldots$.

12. *Vecteurs. Quaternions élémentaires.* — Un quaternion se réduit à un vecteur $\overline{A}$ (quaternion élémentaire), quand sa partie scalaire est zéro, c'est-à-dire quand son angle est droit. Les règles trouvées pour les quaternions s'appliquent encore à ces vecteurs. Nous allons nous conformer, dans la suite, à la notation la plus répandue des quaternionistes qui représentent $\overline{A},\overline{B},\overline{C},\ldots$ par $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ leurs tenseurs par $T\alpha, T\beta\ldots$, les vecteurs-unité $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$ par $i,j,k$, AB par $T\alpha\, T\beta \cos\theta$, etc ; mais il sera bon de rappeler que $\overline{A} \equiv \alpha$ est autre chose que A. Les équations que nous allons trouver sont des égalités de quaternions, dont chacune est équivalente, en général, à quatre équations entre scalaires.

*a*) Ce qui a été trouvé pour l'addition des quaternions permet de conclure, que la somme des vecteurs $\alpha,\beta,\gamma\ldots$ est un nouveau vecteur, qu'on trouve en les composant comme des forces données ; cette somme est associative et commutative.

*b*) Pour les produits de deux vecteurs $\alpha$ et $\beta$, qui font entre eux l'angle $\theta$, l'équation (18) nous donne

$$\alpha\beta = -AB + \overline{VAB} \qquad \beta\alpha = -AB + \overline{VBA} \tag{23}$$

Leurs scalaires sont égales :

$$S\alpha\beta = S\beta\alpha \tag{24}$$

avec la valeur commune $-T\alpha . T\beta . \cos\theta$. Leurs parties vectorielles diffèrent par le signe :

$$V\alpha\beta = -V\beta\alpha \tag{25}$$

le premier membre de (25) est $T\alpha\, T\beta \sin\theta . i'$, si $i'$ est un vecteur-unité perpendiculaire à $\alpha$ et $\beta$, tel que $\alpha$, $\beta$, $i'$ forment un système droit. On a évidemment encore

$$\alpha\beta + \beta\alpha = 2S\alpha\beta \tag{26}$$

et

$$\alpha\beta - \beta\alpha = 2V\alpha\beta. \tag{27}$$

La partie scalaire $S\alpha\beta = 0$, lorsque $\alpha$ est perpendiculaire à $\beta$ ; la partie vectorielle $V\alpha\beta = 0$, lorsque $\alpha$ est parallèle à $\beta$.

*c*) Pour le carré d'un vecteur, les équations (23) fournissent : $\alpha^2 = -(T\alpha)^2$ ; donc, pour le carré d'un vecteur-unité, quel qu'il soit $-1$. Il est donc $i^2 = -1$ ; $i^3 \equiv i^2 . i = -i$, etc.

*d*) Pour le produit $\alpha\beta\gamma$ de trois vecteurs, l'on trouve d'après (21) et (22)

$$S\alpha\beta\gamma = -CVAB$$

et

$$V\alpha\beta\gamma = -BC.\bar{A} + CA.\bar{B} - AB.\bar{C}$$

Il en résulte

$$S\alpha\beta\gamma = S\beta\gamma\alpha = S\gamma\alpha\beta \tag{28}$$

et

$$V\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha + \gamma S\alpha\beta. \tag{29}$$

Le premier membre de la dernière équation peut s'écrire

$$V\alpha(S\beta\gamma + V\beta\gamma)$$

ou

$$\alpha . S\beta\gamma + V\alpha V\beta\gamma,$$

de sorte que

$$(30) \qquad V\alpha V\beta\gamma = -\beta S\gamma\alpha + \gamma S\alpha\beta$$

ce qui, lorsqu'on y substitue le vecteur $V\delta\varepsilon$ au lieu de $\alpha$, nous montre que

$$(31) \quad VV\delta\varepsilon V\beta\gamma = -\beta S\gamma(\delta\varepsilon - S\delta\varepsilon) + \gamma S(\delta\varepsilon - S\delta\varepsilon)\beta = -\beta S\gamma\delta\varepsilon + \gamma S\delta\varepsilon\beta$$

*e*) Enfin, nous avons d'après (§ 10, *a*) et (§ 7)

$$K\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n = K\alpha_n K\alpha_{n-1} \ldots K_2 K_1$$

ou

$$K\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n = (-1)^n \alpha_n\alpha_{n-1} \ldots \alpha_1 \alpha_2$$

ce qui peut s'écrire

$$S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n - V\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n = (-1)^n [S\alpha_n\alpha_{n-1} \ldots \alpha_1 + V\alpha_n\alpha_{n-1} \ldots \alpha_1]$$

Il en résulte les deux équations :

$$(32) \qquad S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n = (-1)^n S\alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_1$$

et

$$(33) \qquad V\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n = (-1)^{n-1} V\alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_1$$

dont (24) et (25) ne sont que des cas spéciaux.

Les équations (24 — 33) suffisent pour les nombreuses applications du calcul des quaternions.

M. Fr. Daniëls, Fribourg (Suisse).