Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1902)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CONSIDÉRATIONS SUR LA NATURE DE L'ESPACE

Autor: Pietzker, Fr.

Kapitel: IV PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5578

présentent dans la seule géométrie euclidienne ; on aurait prouvé par là la possibilité unique de cette géométrie.

On parvient au même but si l'on emploie les trois coordonnées données non en même temps, mais successivement. Déterminons dans le plan xy, au moyen des coordonnées $OA = x$, $OB = y$, le point I comme extrémité de la diagonale principale du rectangloïde OAIB, et combinons ensuite cette diagonale principale OI avec la troisième coordonnée $OC = z$ perpendiculaire au plan xy de façon à former un rectangloïde OIQC. Il est indispensable que la position du point Q soit indépendante de l'ordre dans lequel on a employé les trois coordonnées ; et pour cela il faut par conséquent parvenir au même point Q, si l'on se sert, par exemple, au lieu du rectangloïde OAIB formé par x et y, de celui OAKC formé par x et z, et dont la diagonale principale se combinerait alors avec $OB = y$. Ici également l'on démontre que l'angle KCL doit nécessairement être égal à un droit, et la conclusion à en tirer est d'accord avec celle qui vient d'être présentée ci-dessus [1].

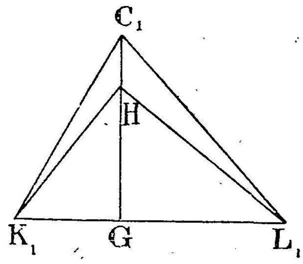

Fig. 4.

IV

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS

Dans le chapitre précédent, j'ai démontré d'une façon évidente l'impossibilité de chaque forme d'espace contraire aux suppositions d'Euclide. Cette démonstration, qui ne considère que des grandeurs finies, se base uniquement sur les hypothèses que le système de Bolyai et Lobatschewsky a empruntées au système de géométrie euclidienne. En partant de ceci : qu'entre tous les couples de points de l'espace il existe toujours une détermination par coordonnées réciproques, je n'ai fait que tirer les conséquences de trois hypothèses, à savoir : 1° que la structure de l'espace est partout la même ; 2° que cet espace renferme cer-

[1] Voir le développement de cette démonstration dans le travail cité : *Die Gestaltung des Raumes*, p. 26-27.

taines lignes parfaitement déterminées par deux points et, par conséquent, complètement retournables; 3° que tout point peut être déterminé en mesurant certains segments sur plusieurs lignes de cette espèce. Ces trois hypothèses ne conviennent pas moins à la géométrie de Lobatschewsky qu'à celle d'Euclide.

On pourrait donc croire la question tranchée s'il était permis de regarder ces hypothèses comme incontestables. Or, par un coup d'œil jeté sur le développement de la géométrie non-euclidienne, l'on reconnaît déjà que ce n'est pas permis. Et même, il est inutile d'invoquer ce développement, car, dans la géométrie euclidienne, l'établissement d'une définition de la ligne droite partout acceptée a suscité déjà beaucoup de difficultés. A la définition de la ligne droite comme ligne parfaitement déterminée par deux points, on a eu raison d'objecter que cette définition est purement négative, aussi l'a-t-on souvent remplacée par celle qui considère la droite comme le plus court chemin entre deux points [1].

Je crois, en vérité, que cette seconde définition est encore plus contestable que la première, laquelle renferme, au fond, tous les attributs que l'esprit accorde d'une façon innée à la droite. Toutefois, les objections faites à la définition primitive exigent impérieusement qu'elle soit corrigée par des attributs positifs, et ceci ne pourra se faire que par une analyse de la nature même de l'espace.

Cette analyse diffère beaucoup de l'argumentation usitée; dans celle-ci, au lieu d'étudier l'espace même, on part d'une série

---

[1] Helmholtz, par exemple, est de cet avis, car il dit ceci dans un passage de son mémoire *Sur l'origine et la signification des axiomes géométriques :* « Nous déterminons des droites par la trajectoire des rayons lumineux, trajectoire que l'expérience nous donne comme rectiligne ; mais il se pourrait que dans un espace ayant une autre courbure, la lumière se répandant dans un milieu réfringent partout homogène suivit également le plus court chemin ».

En réalité, les faits sont contraires à l'idée de Helmholtz. Nous ne pouvons pas le moins du monde expérimenter la direction rectiligne des rayons lumineux qui ne sont pas saisissables, nous jugeons plutôt cette direction en examinant si les points qu'elle renferme paraissent se superposer à nos yeux ; nous admettons *a priori* que le chemin du rayon lumineux est droit, mais cette supposition n'est point le résultat d'une expérience, elle précède au contraire toute expérience qui sans cela serait impossible. Son origine réside dans la propriété de la droite d'être déterminée par deux de ses points. Nous croyons rectiligne le rayon lumineux allant du point A vers le point B parce que la ligne droite AB est la seule ligne assez bien déterminée par les deux points.

d'axiomes, et l'on juge une partie d'entre eux admissibles d'après le degré où ils se laissent démontrer comme conséquence de l'autre partie. Les axiomes isolés ne constituent pas la notion de l'espace, notion dont chaque axiome ne représente qu'un côté; et, en s'abîmant dans la considération des axiomes isolés, on risque de perdre de vue l'idée même de cet espace.

C'est à cette idée que je veux maintenant revenir, et j'examinerai dès l'abord jusqu'à quel point l'on peut regarder comme conceptions nécessaires les bases de la démonstration donnée au chapitre précédent.

En analysant l'idée de l'espace d'après le sens dans lequel elle a été partout et pendant tous les siècles interprétée sans contradiction, je définis l'espace comme une variété intuitive, partout homogène, à dimensions multiples, c'est-à-dire comme l'ensemble d'éléments dont chacun est déterminé par un certain nombre de grandeurs variables indépendantes les unes des autres, nombre à examiner plus tard.

Nulle part, je crois, on ne saurait contredire cette analyse de la notion d'espace, mais la grande autorité d'Helmholtz me force à dire quelques mots sur l'hypothèse d'un espace qui n'aurait pas partout même structure. Helmholtz dit que deux figures qui, juxtaposées, se manifestent comme égales, peuvent éprouver en se déplaçant des déformations ou changements. En discutant ce cas, il ne remarque pas qu'il faut avoir la notion d'égalité avant que l'on puisse concevoir celle de changement, et qu'une égalité dans l'espace ne peut se constater qu'en considérant à la fois divers lieux de cet espace; une chose ne peut jamais se comparer à elle-même.

L'hypothèse d'une forme d'espace changeant d'un lieu à l'autre écarterait la notion d'égalité du domaine de la géométrie, qui cesserait alors d'être une branche des mathématiques. On sait le rôle que cette notion joue dans toutes les mathématiques, rôle si essentiel qu'elle constitue la forme même des thèses dont on se sert presque partout dans cette science. Il est d'une haute importance que la formule exprimant le contenu des théorèmes de mathématiques se présente presque toujours comme une équation.

La structure parfaitement homogène de l'espace est donc une de ses qualités essentielles. Cet espace apparaît comme ensemble d'une foule d'éléments déterminés par les différentes valeurs des grandeurs variables sus-énoncées. Si l'on donne à chacune de ces variables *une valeur parfaitement déterminée*, on obtient l'élément appelé *point;* l'ensemble de tous les points obtenus en faisant varier une seule des grandeurs est la *ligne*, l'ensemble de tous les points qui ne diffèrent les uns des autres que par les valeurs de deux grandeurs est la *surface* (plan).

En raison de la structure partout égale de l'espace, l'établissement de ces valeurs doit avoir lieu de la même façon, quel que soit le point d'où l'on part; il est donc permis de choisir ce point, qui est *l'origine* de la détermination, d'une manière arbitraire, et les valeurs mesurées à partir de cette origine pour déterminer un autre point, sont les *coordonnées* de ce point.

Je renvoie, comme je l'ai déjà annoncé, au chapitre suivant l'examen du nombre de ces coordonnées, et je vais discuter d'abord l'aspect de l'espace à trois dimensions, le seul qui nous soit réellement connu. En cet espace, tout point sera déterminé par les trois coordonnées que nous désignons par les lettres x, y, z. Si nous les faisons varier en les soumettant à deux relations, nous avons une ligne, et, de toutes les lignes ainsi obtenues, il y a une espèce particulière qui porte le nom de *droite.* Nous arrivons à la notion de droite par la considération suivante.

Fixant la coordonnée z, donnons toutes les valeurs possibles à x et à y, et appelons *surface x y* la surface résultant de cette opération. Supposons maintenant qu'il y ait une équation entre les coordonnées x et y, ceci nous permettra de ramener ces deux variables à une seule dont les différentes valeurs détermineront une série continuelle de points, c'est-à-dire une ligne. Chacun de ces points sera donc déterminé par une variable unique jouant le rôle d'une nouvelle coordonnée : en ceci, la coordonnée z ne participe en rien. Donc, à cause de l'indépendance mutuelle qui existe entre les trois coordonnées, z, ne dépendant ni de x ni de y, ne dépend pas davantage du résultat de la combinaison de x et y faite sans son concours.

Conséquence : Toutes les lignes que l'on obtient en faisant varier seulement z et en gardant des valeurs constantes à x et à y ont le même rapport à chacune des lignes résultant de la variation de x et y tandis que z est invariable; dans l'espace intuitif, ce rapport entre deux éléments est ce qu'on nomme traditionnellement la position d'un élément vis-à-vis de l'autre, donc, on peut échanger entre elles toutes les lignes qui proviennent de la seule variation des coordonnées x et y sans altérer leur rapport à la coordonnée z.

C'est-à-dire : abstraction faite de ce rapport, la surface x y est mobile sur elle-même, et, comme cette qualité convient à chacune des surfaces obtenues en faisant varier la coordonnée z, on a le droit de dire : On peut faire mouvoir sur lui-même l'espace à trois dimensions, en sorte qu'il y a dans ce mouvement une ligne immobile. Cette ligne, ayant précisément la propriété qui caractérise la droite à la fois dans la géométrie d'Euclide et celle de Lobatschewsky, sera l'axe des coordonnées z. Or, dans l'espace considéré, qui a partout même structure, le choix de cet axe est absolument arbitraire; disons donc : Dans l'espace à trois dimensions, on peut tracer par chaque point une infinité de lignes répondant à la notion de droite telle qu'elle a toujours été reconnue dans la géométrie. L'existence de ces droites est une conséquence nécessaire de l'indépendance mutuelle des grandeurs fondamentales fixant les points de notre espace.

Reconnaissons la nature de la surface qui contient tous les points pour lesquels x et y, par exemple, sont variables, tandis que z est invariable. Si, gardant à l'une des premières coordonnées une même valeur constante, nous faisons varier l'autre, nous avons une *droite*, puisque la troisième coordonnée est aussi constante; donc, en toute sa longueur, cette droite appartient à la surface en question, et cette surface, déjà nommée la surface xy, a précisément la qualité par laquelle on définit ordinairement le *plan*, autant dans la géométrie d'Euclide que dans celle de Lobatschewsky.

On voit également qu'il y a un nombre infini de tels plans, puisque le choix des coordonnées x et y est parfaitement arbitraire, et qu'en vertu de la structure partout homogène de l'espace, ces plans sont tous congruents entre eux et composés de parties congruentes entre elles.

Nous sommes arrivés aux deux notions de droite et de plan, qui dépendent l'une de l'autre, par la même argumentation, et il nous a suffi pour cela de combiner trois principes fort simples, savoir : l'espace est intuitif, partout homogène, et les mesures qui déterminent ses divers points sont indépendantes les unes des autres; nous avons fait appel également au rapport qui existe entre les trois dimensions de l'espace, et, en particulier, ce n'est qu'en quittant la surface à deux dimensions et considérant la troisième coordonnée que nous avons vu se dévoiler à nos yeux la nature de la droite.

Je rappelle maintenant le raisonnement donné au précédent chapitre : j'y ai démontré que la géométrie euclidienne seule est en état de remplir les exigences du principe de détermination de coordonnées réciproques. Si une telle détermination est possible, comme l'on s'en souvient, dans le plan à deux dimensions, même sans l'emploi des parallèles euclidiennes, ceci ne peut plus s'admettre dès que l'on fait intervenir la troisième dimension de l'espace.

Le rôle important joué dans cette argumentation autant que dans les considérations exposées ci-dessus par la troisième dimension fait espérer la possibilité de démontrer l'existence des parallèles euclidiennes d'une façon plus simple, en n'utilisant que les moyens grâce auxquels j'ai réussi à faire surgir la notion de droite, c'est-à-dire surtout l'indépendance mutuelle des trois coordonnées. Cet espoir est rempli par les développements qui suivent.

Deux coordonnées étant mutuellement indépendantes, il s'ensuit que chacune d'elles a le même rapport avec chacune des deux moitiés de l'autre qui sont séparées par l'origine du système, ou que chacune des droites, sur lesquelles on mesure ces deux coordonnées, est perpendiculaire à l'autre. Ceci étant vrai de chaque couple de coordonnées, on a, comme base de détermination, trois droites perpendiculaires entre elles. L'homogénéité de l'espace fait en même temps que l'on peut construire un tel système à partir de tout point, en sorte que les coordonnées partant d'un point répondent respectivement aux coordonnées partant d'un autre. Pour parvenir d'un point de l'espace à un autre, il faut donc opérer trois mouvements répondant aux trois directions de coordonnées. Il peut se faire que l'un ou l'autre de ces mouvements étant nul, un mouvement unique suffise. La seule coordonnée qui, en ce cas, fixe la position de l'un des points vis-à-vis de l'autre, est déterminée, c'est la grandeur appelée ordinairement distance de ces points ; donc, cette distance est précisément la grandeur qui représente le rapport mutuel des deux points, ce rapport étant évalué dans le sens d'une seule coordonnée.

Soient maintenant deux points. Prenons leur droite comme base de la première coordonnée d'un système, et un point quelconque de cette droite comme origine. Tant que les points se meuvent sur cette droite, leur position, relativement à l'origine, sera déterminée par une valeur unique. Mais cet état change dès que les deux points quittent la droite pour avancer sur deux droites perpendiculaires à la première ; alors, leur position vis-à-vis de l'origine et leur rapport mutuel seront déterminés par deux valeurs indépendantes l'une de l'autre.

Supposons, en particulier, que les mouvements des deux points au sens de la seconde coordonnée soient identiques ; il est clair que le changement de position, opéré dans ce sens, n'altérera pas le rapport mutuel de ces points, attendu que ce changement est identique pour chacun d'eux. Après le mouvement comme avant, ce rapport mutuel ne sera déterminé que par une valeur mesurée dans le sens de la première coordonnée, et, après le mouvement, cette valeur sera la même qu'avant, car, sans cela, la première coordonnée serait influencée par des événements arrivant dans la deuxième, ce qui répugne évidemment à l'indépendance mutuelle des trois directions fondamentales que nous avons reconnue comme propriété indispensable de l'espace.

Or, on se souvient que la grandeur qui représente le rapport mutuel de ces deux points, prise dans le sens d'une seule coordonnée, n'était autre chose que la distance de ces points. On voit donc que, si deux points se meuvent de quantités égales sur deux perpendiculaires à la droite qui joint leurs positions primitives, pendant tout le mouvement leur distance demeure invariable, ce qui caractérise la géométrie euclidienne. Le théorème de cette géométrie qui déclare être partout la même la distance de deux droites perpendiculaires à une troisième, est justement la conséquence nécessaire de l'indépendance mutuelle qu'il faut supposer entre les trois directions constituant l'espace (1).

Cette situation ne répond pas seulement à la théorie d'Euclide, mais elle répond aussi à la notion de parallélisme telle qu'elle a toujours été conçue par un esprit dégagé de parti pris. En tout temps, le sens commun a regardé deux parallèles comme droites gardant toujours la même distance.

Or, c'est le devoir de la recherche scientifique d'examiner au point de vue critique cette notion innée, afin de voir si elle est compatible avec la notion de droite dérivée des propriétés fondamentales de l'espace. Il faut regretter qu'au lieu de suivre cette voie, les savants aient préféré adopter une nouvelle définition du parallélisme, en déclarant comme parallèles deux droites qui ne se rencontrent pas.

Certainement, deux parallèles ne se rencontrent pas, *mais, comme nous n'avons pas de moyen direct de connaître ce qui se passe au delà des bornes de l'espace limité, ouvert à notre expérience immédiate, notre compréhension de ce fait n'est pas une compréhension primitive*. De ce que deux parallèles, gardant la même distance dans l'espace homogène se trouvent toujours l'une vis-à-vis de l'autre dans une situation identique à celle d'où elles étaient parties, situation qu'elles gardent même quand on les prolonge indéfiniment, nous concluons qu'elles ne se coupent

---

(1) C'est maintenant que l'argumentation du chapitre précédent se présente sous un nouveau jour. Nous avons exigé que les coordonnées fussent indépendantes l'une de l'autre; or, la détermination d'un point par des coordonnées réciproques, telle que l'explique la figure 1, ne satisfait pas à cette exigence; en effet, la coordonnée OA $= x$ n'est pas la seule pour déterminer la ligne AI partant de A, et la direction de cette ligne dépend aussi de l'autre coordonnée OB $= y$; une détermination réciproque par le moyen de coordonnées indépendantes l'une de l'autre n'a résulté que de cette hypothèse : AI et BI perpendiculaires à OA et OB, donc OAIB est un véritable rectangle euclidien.

Nous voyons de même que les plans IAK, IBL, KCL qui se présentent dans la figure 2 n'ont pas d'abord la position complètement déterminée par une coordonnée que l'indépendance mutuelle des coordonnées exige; ils ne répondent à cette exigence qu'au moment où l'on est sûr que c'est la structure euclidienne de l'espace qui, seule, garantit la parfaite réciprocité.

Aussi comprend-on facilement la connexion intime qu'il y a entre cette argumentation et celle que nous avons donnée ci-dessus. Le principe de réciprocité a surgi de la convertibilité absolue de la droite, et celle-ci, à son tour, est resultée de l'indépendance mutuelle des trois coordonnées de l'espace. Comme pour atteindre la notion de droite, il a fallu utiliser les rapports mutuels des trois dimensions, il n'est pas surprenant que dans le chapitre précédent il ait fallu, pour établir la géométrie euclidienne, revenir à la troisième dimension.

jamais. Mais cette propriété n'est qu'une notion dérivée, et c'est en essayant de baser toute la théorie du parallélisme sur cette notion que l'on a exercé une influence fatale sur le développement de la géométrie.

En définissant les parallèles comme droites ne se rencontrant pas, on a substitué à une idée positive et innée de l'esprit une définition absolument négative ; on a abandonné le fond sûr des parties de l'espace accessibles à notre intuition pour des théories basées sur des parties de l'espace fermées à notre connaissance immédiate.

C'est de cette façon que l'on est arrivé à donner cette malheureuse définition du parallélisme qui, en regardant deux parallèles comme droites se coupant à l'infini, introduit déjà insensiblement dans la géométrie toutes les conceptions qui servent de base à la géométrie non-euclidienne, et qui sont contraires à la notion naturelle de l'espace. En spécifiant qu'il n'y a pas de bornes aux constructions géométriques dont nous avons l'idée, nous considérons la notion de l'infini comme positive alors qu'elle peut être essentiellement négative. Cet emploi de la notion de l'infini est peu compatible avec la logique, et peut-être est-il permis de croire que la connaissance de cette incompatibilité va croissant de jour en jour.

V

LE NOMBRE DES DIMENSIONS DE L'ESPACE

L'étude précédente a donc conduit à ce résultat : Dans l'espace partout homogène et constitué par trois dimensions indépendantes l'une de l'autre, il ne saurait exister d'autre géométrie que celle qui est d'accord avec les hypothèses euclidiennes. Cependant, la recherche de la forme de l'espace n'est pas encore pour cela terminée, vu que la question se pose aussitôt de savoir s'il y a une étendue ayant plus de trois dimensions. L'examen critique de cette question est d'autant plus nécessaire que l'on aperçoit facilement une connexion intime entre elle et la question de la structure de l'espace. Rappelons-nous comment, dans